



Los Ábacos  
Instrumentos Didácticos

---

## PRÓLOGO

---

**A**nte los nuevos retos que demanda nuestra sociedad y el compromiso expresado en el Plan Nacional de Desarrollo 2001-2006, que esboza un país en el que se reduzcan las desigualdades sociales y se ofrezca a toda la población oportunidades de desarrollo y convivencia basadas en el respeto a la legalidad y la equidad, se hace imperante replantear las tareas de la educación nacional con el propósito de que cada una de sus acciones contribuya a construir la nación que todos queremos.

Desde esta perspectiva, el Programa Nacional de Educación 2001-2006 se ha propuesto como ejes rectores una:

Educación para todos

Educación de calidad

Educación de vanguardia

Para dar cumplimiento a estos principios, a través de estrategias y acciones, la Subsecretaría de Servicios Educativos para el Distrito Federal propone cuatro líneas de acción:

Escuelas de Calidad

Cobertura con Equidad

Participación Social y Vinculación Institucional

Administración al Servicio de la Escuela

Ejes de trabajo expresados en el Programa de Servicios Educativos para el Distrito Federal que tienen como finalidad alcanzar un sistema de educación básica de calidad que brinde igualdad de oportunidades a todos los grupos de la población, atienda las necesidades especiales de educación y combata la problemática educativa.

En el marco de la Ley General de Educación, la Educación Especial es una modalidad de la Educación Básica que está destinada a la atención de individuos con discapacidades transitorias o definitivas, así como a aquellos con aptitudes sobresalientes.

Actualmente, la Educación Especial es vista como el conjunto de estrategias, recursos especializados y servicios escolarizados y de apoyo que se ponen a disposición del Sistema Educativo para que todos los

alumnos logren acceder al currículo de la Educación Básica.

En este sentido, la Dirección de Educación Especial es la unidad técnico, operativa y administrativa, adscrita a la Dirección General de Operación de Servicios Educativos en el Distrito Federal, responsable de atender a los educandos de manera adecuada a sus condiciones, con equidad social y propiciar la integración de alumnos que presenten alguna discapacidad a los planteles de Educación Básica Regular. Para quien no logra dicha integración, esta instancia procura la satisfacción de necesidades básicas de aprendizaje para su autónoma convivencia social y productiva.

De acuerdo a esta política educativa, la Dirección de Educación Especial da cumplimiento a los postulados de equidad, atiende a la diversidad y promueve la Integración Educativa a través de sus diferentes servicios: CAM (Centro de Atención Múltiple) Básico y Laboral, USAER (Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular) y UOP (Unidad de Orientación al Público), con el objetivo primordial de brindar un servicio de calidad en la atención a la diversidad de los alumnos con necesidades especiales de educación, incluyendo aquellos con aptitudes sobresalientes.

Este ejercicio de respuesta a la demanda social ha permitido la transformación del sistema paralelo de educación en uno integrado e incluyente, que adjunta un modelo de "Escuela para todos", donde la

heterogeneidad y atención a la diversidad se convierten en aspectos prioritarios de un enfoque educativo centrado en el proceso de aprendizaje.

Esta perspectiva, rompe el paradigma de sociedades exclusivas y perfila la posibilidad de construir escuelas inclusivas donde la existencia y convivencia sea abierta, plural y democrática, teniendo como característica fundamental, la diferencia en las relaciones humanas; por lo tanto, donde se acepte la existencia de un todo diverso y donde cada individuo sea considerado de acuerdo a su singularidad.

En el ámbito internacional, el discurso teórico sobre la integración de los alumnos y alumnas con necesidades especiales de educación con y sin discapacidad se ha ido enriqueciendo a partir del análisis de la práctica educativa. Sin embargo, el término integración significa en sí mismo integrar en la vida escolar y social a alguien o algún grupo que está siendo excluido. Si bien es cierto que la integración educativa propició en su momento, que las alumnas y los alumnos, con necesidades especiales de educación con y sin discapacidad, accedieran a la escuela regular, todavía persisten prácticas segregadoras que producen sentimientos de inseguridad y baja autoestima en los educandos.

En este sentido, la finalidad de la integración ha llevado a los especialistas y a la comunidad educativa a revalorar el papel y compromiso de la integración, por lo que hoy se hace imperativo asumir el término de la Inclusión como el concepto teórico-práctico que

garantice una “escuela para todos” y una educación con calidad y equidad, retos que deben conjuntar esfuerzos entre niveles y modalidades educativas.

La correspondencia que en términos de lo anterior se da entre la Educación Especial y la Educación Regular nos obliga a reflexionar sobre la necesidad de la vinculación entre los niveles educativos, el compromiso de impulsar la misión de la Educación, los propósitos educativos y a compartir los esfuerzos que cada instancia aporta en esa misma dirección.

Una “escuela para todos”, podríamos definirla como un sistema organizativo que promueve la colaboración y busca un sistema educativo más coherente cuyo objetivo primordial sea el beneficio común. Un espacio donde se compartan conocimientos y experiencias de trabajo, con la finalidad de crear un ambiente de tolerancia e igualdad de oportunidades donde la comunidad educativa asuma la responsabilidad del aprendizaje de todas y todos los alumnos. Entendiendo la Inclusión como un proceso que asegura la pertenencia de todos los alumnos y alumnas con necesidades especiales de educación a la comunidad escolar.

En resumen, Inclusión significa que los talentos de cada individuo, incluyendo aquellos con profundas discapacidades y capacidades sobresalientes, sean reconocidos, fomentados y aprovechados al máximo. De esta manera cada persona es vista como un miembro valorado y respetado en su comunidad.

Sin embargo, los cambios no son acciones por decreto, sino constituyen la suma de esfuerzos de los diferentes sectores involucrados, en este caso, de los actores del proceso educativo, donde el quehacer docente de la comunidad escolar ha permitido instrumentar en todas las escuelas de Educación Básica un ejercicio de análisis y discusión para enfrentar los retos que emanen de la particular situación de cada plantel. El Proyecto Escolar es el resultado de la valoración de debilidades y fortalezas que confluyen en la comunidad escolar, así mismo es el punto de partida para el diseño de acciones y estrategias encaminadas hacia la búsqueda de la optimización de una nueva gestión y mejora de la calidad de la educación.

En una sociedad que cada día se vuelve más heterogénea y compleja, la comunidad escolar enfrenta una gama de diversidades, tanto culturales, sociales como económicas, las cuales deben resolverse teniendo como principios rectores: el respeto y la tolerancia.

Atendiendo a esta demanda, la Dirección de Educación Especial se ha impuesto recuperar la experiencia docente y proponer ejes de análisis para abordar y discutir las Necesidades Especiales de Educación que se presentan hoy en día en la comunidad educativa.

En esta reflexión, la colección "Estrategias Didácticas" surge con el propósito de proponer diversas acciones que respondan a criterios de equidad y calidad, así como para apoyar en el proceso educativo a todo el

personal docente. Los títulos que forman parte de esta colección están relacionados con proyectos innovadores y son: *"Las Ábacos, Instrumentos Didácticos"*, *"Situaciones Didácticas para Alumnos con Discapacidad Intelectual o Discapacidad Auditiva"*, *"Plan de Trabajo de la USAER: Orientaciones para su Elaboración"*, *"Educación Bilingüe para el Niño Sordo: Propuesta"*, *"Fichas de Trabajo para Apoyar la Gestión del Proyecto Escolar del CAM-Básico"*, *"Experiencias en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas con Alumnos con Discapacidad Intelectual y Auditiva"* y *"Adecuaciones al Fichero de Matemáticas para Niños Débiles Visuales, 1º Grado"*. Asimismo, se proponen los *"Lineamientos Técnicos Pedagógicos CAM-Laboral"*, *"Lineamientos Técnicos Pedagógicos CAM-Básico"* y *"Lineamientos Técnicos Pedagógicos USAER"*, mismos que se han desarrollado y fortalecido en los servicios de Educación Especial a partir de la recuperación de experiencias de los maestros dentro del aula y que buscan fortalecer la atención de la población que se encuentra en educación especial partiendo del currículo básico y compartiendo proyectos innovadores de apoyo didáctico en el ámbito escolar., convirtiéndose así en herramientas imprescindibles del docente.

Desde diferentes áreas de conocimiento, los maestros tendrán puntos de referencia para abordar los obstáculos cotidianos en el aula y a su vez expresar opiniones y sugerencias. Concientes de la importancia de reformular las funciones y canales de comunicación entre todos los protagonistas del proceso educativo en Educación Especial, la presente colección tiene como



finalidad iniciar un ejercicio de diálogo, acción y evaluación del trabajo dentro y fuera de la escuela donde todos estemos incluidos.

Desde esta perspectiva es necesario resaltar que no se trata de un proyecto único, sino que forma parte de un programa a largo plazo donde la comunidad escolar encuentre un espacio de expresión que permita desarrollar y compartir diversas acciones encaminadas a lograr la inclusión de los niños y niñas con necesidades especiales de educación: discapacidad, aprendizaje, lenguaje, conducta y aptitudes sobresalientes.

Patricia Sánchez Regalado

Directora de Educación Especial

## ÍNDICE

---

INTRODUCCIÓN.....	13
I. EL ÁBACO UN INSTRUMENTO DIDÁCTICO.....	16
II. DIDÁCTICA DE LOS ÁBACOS.....	29
III. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL.....	33
IV. EN SITUACIONES DE CONTEO APRENDAMOS A REPRESENTAR CANTIDADES.....	40
V. ALGORITMOS PARA SUMAR CON EL ÁBACO.....	67
VI. ALGORITMOS PARA RESTAR CON EL ÁBACO.....	95
VII. ALGORITMOS PARA MULTIPLICAR CON EL ÁBACO.....	114
VIII. ALGORITMOS PARA DIVIDIR CON EL ÁBACO.....	146
BIBLIOGRAFÍA.....	166
SUGERENCIAS Y COMENTARIOS.....	168



## INTRODUCCIÓN

---

La enseñanza del sistema de numeración decimal y de los algoritmos de las cuatro operaciones fundamentales, son temas que se desarrollan a lo largo de los seis grados de la escuela primaria; la comprensión y dominio de los contenidos que giran alrededor de estos temas permiten resolver una gran variedad de problemas; desde los que están vinculados con la vida cotidiana, hasta aquellos relacionados con otros aspectos de las mismas matemáticas. Así La importancia de aprender los aspectos relacionados con el sistema de numeración decimal resulta inobjetable.

Para la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal, a lo largo del tiempo, se han diseñado una serie de materiales didácticos, los cuales concretizan las propiedades, mismos que permiten, a los propios niños, el descubrimiento de las relaciones fundamentales del sistema, así como de algunos algoritmos para operar. Los ábacos son unos de estos materiales, que en el caso de los niños ciegos resulta indispensable.

Por otra parte, los programas vigentes de nuestro país plantean como enfoque para enseñar matemáticas, **la**

**resolución de problemas.** En este sentido, el uso de los ábacos debe estar ligado a dicho enfoque; Por esta razón, en el presente material el profesor encontrará en cada uno de los apartados dedicados a los diferentes algoritmos, una referencia al tipo de problemas que conviene utilizar para que los niños descubran algún procedimiento para resolver las operaciones. Conviene señalar que si bien en los títulos de cada uno de los apartados aparece el término “algoritmo”, en el cuerpo del documento se ha preferido utilizar la palabra “procedimiento”. La razón es: la idea de algoritmo está ligado a aquellos procedimientos que nos fueron enseñados y se desea que el profesor observe que existen diferentes procedimientos (algoritmos) para resolver alguna operación.

**Para la lectura del documento será conveniente tener a la mano los cuatro tipo de ábacos que se sugieren utilizar, (al inicio de este documento establecemos las características de cada uno, asimismo, se señala la posición respecto al tipo de ábacos que conviene utilizar en cada uno de los grados que conforman la escuela primaria) de otra manera, será difícil obtener algún provecho didáctico de este documento.**

Cabe señalar que el documento no es un manual para utilizar los ábacos, es un material de reflexión a partir del cual el profesor conozca las posibilidades didácticas y también las limitaciones (que no hemos resaltado) de cada uno de los cuatro ábacos.

Al final de cada uno de los apartados dedicados a los algoritmos, el profesor encontrará una situación

(problema) que permite realizar un buen número de operaciones. Se considera necesario que los alumnos, una vez que comprenden los algoritmos, adquieran una cierta habilidad para operar con relativa rapidez. Pero es importante señalar que la ejecución de tales operaciones debe estar contextualizada; tiene sentido realizar muchas operaciones si están ligadas a una situación que se quiere resolver.

La Dirección de Educación Especial espera que el análisis del presente material brinde a los docentes una oportunidad para poner en práctica estrategias didácticas adecuadas a las necesidades educativas de sus alumnos.

## EL ÁBACO, UN INSTRUMENTO DIDÁCTICO

---

**E**n las sociedades antiguas, a los hombres se les planteó la necesidad de realizar cálculos; esta situación los llevó a resolver algunos problemas, por ejemplo: establecer algún procedimiento para abreviar los cálculos. Para el caso, en un primer momento utilizaron los dedos o alguna parte del cuerpo; posteriormente utilizaron algún objeto (piedras) o alguna marca (rayas en un árbol) etc. para poder cuantificar. Más adelante, algunas culturas inventaron el ábaco, instrumento cuya existencia es antigua.

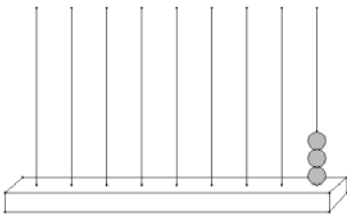
Ya en México se contaba en la época prehispánica con un ábaco llamado Nepohualzinzin, que permitía realizar cualquiera de las cuatro operaciones fundamentales. En nuestra época, el ábaco se sigue utilizando en países como China y Japón.

Este instrumento no es de uso común en las escuelas públicas, sin embargo, bien utilizado puede ayudar a los niños a la comprensión del sistema de numeración decimal, así como a efectuar algoritmos de cada una de las cuatro operaciones fundamentales.

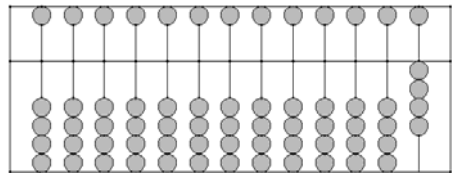
En el caso de los ciegos, el ábaco resulta ser un instrumento muy útil para lograr la comprensión a que se ha hecho referencia; asimismo es una herramienta que le facilitará abordar algunos aspectos de uno de los ejes en que están organizados los contenidos de los programas para la educación primaria: **“Los números sus relaciones y sus operaciones”**.

Algunos de estos contenidos son: conteos, agrupamientos y desagrupamientos, lectura y escritura de números, valor posicional, antecesor y sucesor, comparación de números, algoritmos de las cuatro operaciones básicas, solución de problemas mediante el uso de algún algoritmo, números decimales, suma y resta de números decimales, descomposición de un número en sumando y en factores.

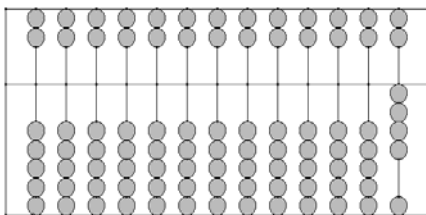
Existen diferentes tipos de ábacos; por ello se necesita analizar y determinar aquél que conviene utilizar con los niños para cada grado escolar. A continuación, se analizan cuatro ábacos.



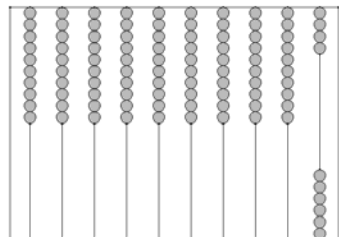
Ábaco de cuentas externas



Ábaco japonés (Soroban) y su variante (Kramer)



Ábaco chino (Sua-pan)



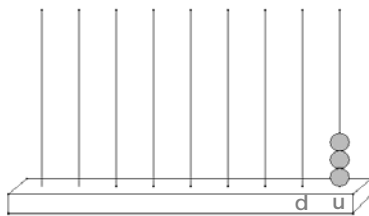
Ábaco de 10 cuentas



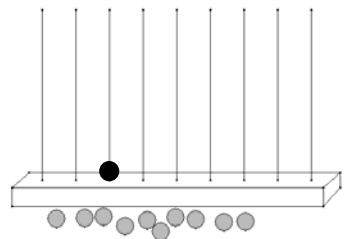
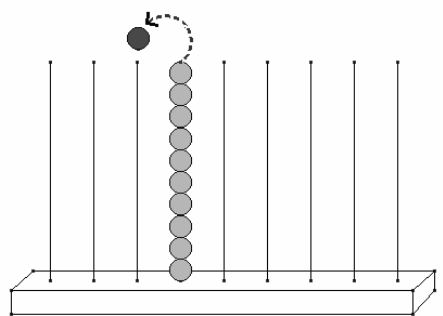
## Ábaco de Cuentas Externas

En este ábaco las cuentas se insertan o se sacan de cada una de las varillas. Para representar cantidades se requiere seguir las siguientes reglas:

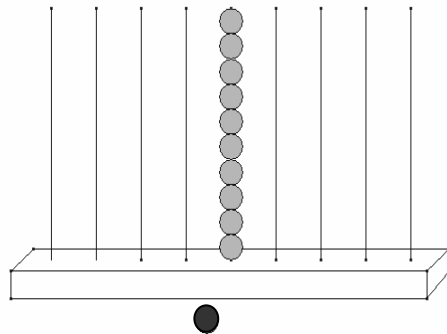
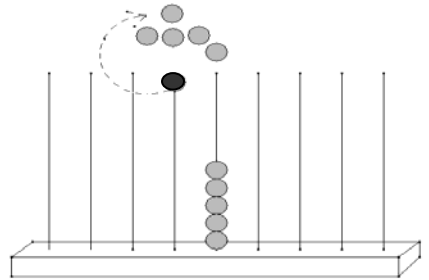
- En la posición en que se muestra este ábaco, cada cuenta que se inserta en la varilla del extremo derecho, representa una unidad, es decir, vale uno.



- 10 cuentas que se hayan colocado en una de las varillas, se deben cambiar por una cuenta que se coloca en la varilla que está inmediatamente a la izquierda, es decir, por una decena.



Una cuenta (que vale una decena), puede cambiarse por 10 cuentas que se registran en la varilla que está inmediatamente a la derecha de la cual se tomó la cuenta. En la práctica se saca la cuenta (decena) y se meten diez cuentas (unidades) en la varilla de la derecha.



A partir de la primera regla se puede derivar el valor de cada cuenta en las otras varillas, así las unidades se representan en la varilla que está en el extremo derecho del ábaco, las decenas en la varilla a la izquierda de las unidades y así sucesivamente las centenas, unidades de millar, etcétera.

Este ábaco permite a los alumnos comprender las dos relaciones fundamentales que rigen el sistema de numeración decimal, es decir, 10 a 1 y 1 a 10. En otros términos: 10 unidades = 1 decena; 10 decenas = 1 centena; 10 centenas = 1 unidad de millar o viceversa 1 decena = 10 unidades; 1 centena = 10 decenas o 1 unidad de millar = 10 centenas; etcétera.

Dada la forma en que está diseñado este ábaco, es recomendable utilizarlo con alumnos que cursan el primero, segundo y tercer grados de la escuela primaria ya que se concretan las relaciones señaladas anteriormente.

En este ámbito el ábaco permite realizar procesos iniciales de la aritmética, tales como el conteo, la concreción de las operaciones, etcétera.

### **Ábaco de Diez Cuentas**

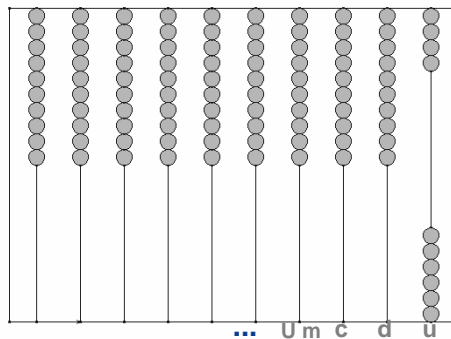
Es el ábaco más conocido, casi en cualquier papelería se puede conseguir. Generalmente se utiliza para contar; en este caso, cada cuenta del ábaco representa una unidad, de manera que dependiendo del número de que tenga, se dice que es de 50 o 100 cuentas. Este uso es muy limitado para las posibilidades que éste ofrece.

Con él se pueden realizar cualquiera de las cuatro operaciones fundamentales y aun la raíz cuadrada.

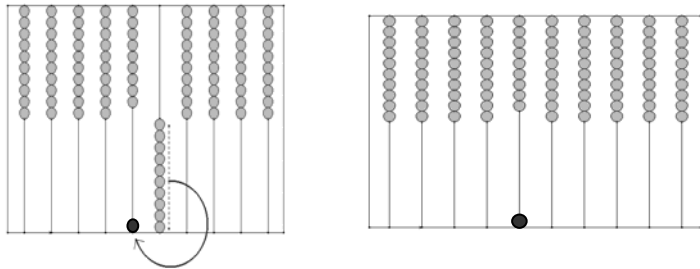
Las cuentas no pueden ser extraídas; este hecho lleva a un replanteamiento de los conocidos algoritmos para realizar las operaciones básicas, como se verá más adelante.

Para representar cantidades se deben tener presentes las siguientes reglas:

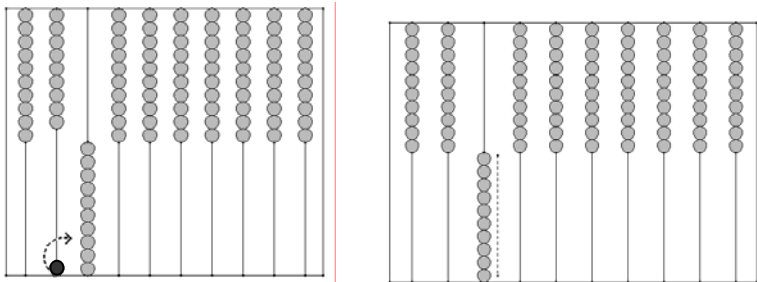
- Cada una de las cuentas de la varilla del extremo derecho del ábaco vale uno. Representa una unidad.



- Cada diez cuentas que se hayan bajado en una misma varilla se deben cambiar por una cuenta que esté en la varilla inmediata a la izquierda, esto significa que las diez cuentas se suben y se baja una cuenta de la izquierda.



- Una cuenta de cualquier varilla es equivalente a diez cuentas de la varilla inmediata de la derecha, como se muestra en las siguientes figuras:



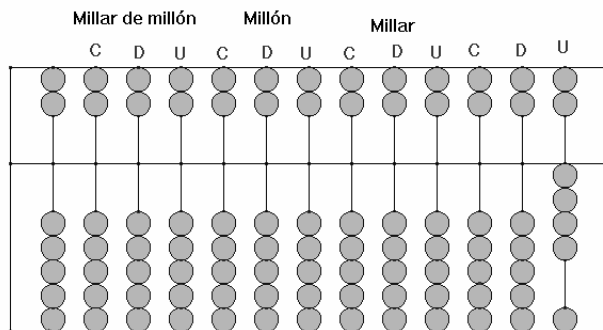
Las consideraciones anteriores permiten deducir el valor a que es equivalente cada cuenta del ábaco. Por otra parte, las características de éste hacen que sea recomendable para alumnos de tercer, cuarto, quinto y sexto grados, ya que pone de manifiesto las dos relaciones fundamentales del sistema de numeración

decimal y pueden realizarse las cuatro operaciones básicas.

Además, en estas etapas los alumnos pueden tener mayor control sobre las cuentas.

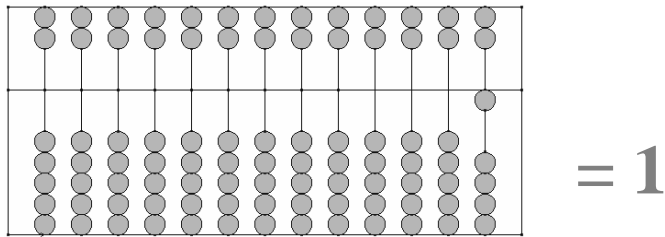
### Ábaco Chino (Suan Pan)

La escritura de cantidades se realiza de la misma forma que los ábacos anteriores, las cuentas de la parte inferior se suben y las cuentas de la parte superior del ábaco, se bajan.

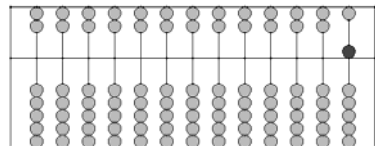
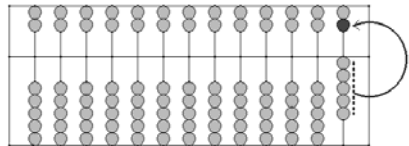


Deben considerarse las siguientes reglas:

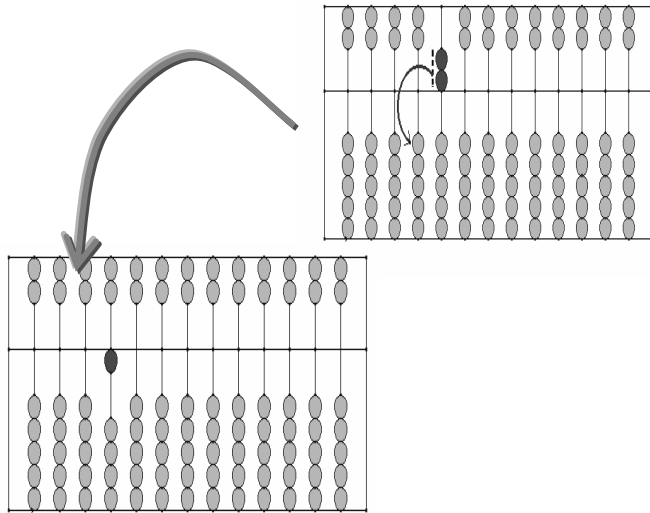
- Cada una de las cuentas del eje extremo derecho del ábaco vale uno, es decir, una unidad.



- Cinco cuentas de la parte inferior del ábaco, deben ser cambiadas por una de las que se localizan en la parte superior del mismo eje. En la práctica, se bajan las cinco cuentas de la parte inferior y una de la parte superior.



Si se bajaron las dos cuentas de la parte superior de cualquier eje, se deben cambiar por una cuenta de la parte inferior en la varilla inmediata a la izquierda, como se muestra en el siguiente esquema:



Al igual que en el caso del **ábaco de 10 cuentas**, las reglas anteriores permiten deducir el valor de cada una, esto es:

1 decena	=	10 unidades						
1 centena	=	10 decenas	=	100 unidades				
1 unidad de millar	=	10 centenas	=	100 decenas	=	1000 unidades		
1 decena de millar	=	10 unidades de millar	=	100 centenas	=	1000 decenas	=	10000 unidades



Así mismo, se pueden establecer los valores de cada una de las cuentas que se hallan en la parte superior de cualquier eje del ábaco, por ejemplo:

- Una cuenta ubicada en la parte superior de las unidades es equivalente a 5 unidades.
- Una cuenta ubicada en la parte superior de las decenas es equivalente a 5 decenas o 50 unidades.
- Una cuenta ubicada en la parte superior de las centenas es equivalente a 5 centenas, 50 decenas o 500 unidades, etcétera.

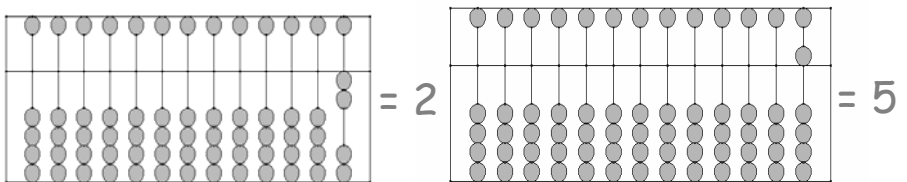
Dadas las características de este ábaco, es recomendable que sea utilizado por niños que cursan el quinto o sexto grado, pues entre otras manifestaciones, el agrupamiento de cinco cuentas en una, facilita las transformaciones, así como los cálculos mentales, permite operar de manera más rápida, lo que no sucede con el ábaco japonés (Kramer), como se mostrará Más adelante.

### **Ábaco Japonés (Soroban)**

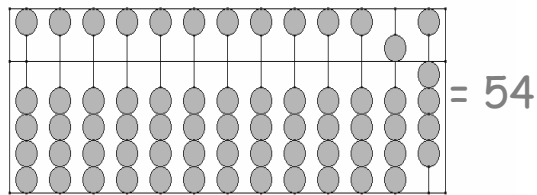
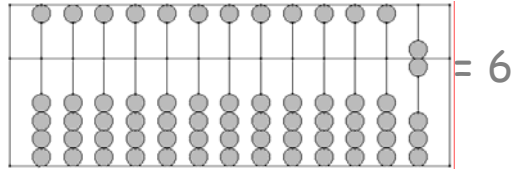
Este ábaco tiene una característica que lo hace diferente a los dos ábacos anteriores: explícitamente no se pone de manifiesto regla de cambio alguna; esta situación hace que la representación de cantidades en

el mismo requiera de un manejo previo de las propiedades del sistema de numeración decimal, principalmente el valor posicional de las cuentas, así:

- Una cuenta de la columna que está al extremo derecho del ábaco representa uno o una unidad y la cuenta que se encuentra en este mismo eje, pero en la parte superior, vale 5 unidades. En el ábaco de abajo a la izquierda se representó el número 2; en el de la derecha el número 5.



- Una cuenta que se encuentre en el lugar de las decenas, vale 10 unidades y la cuenta que se halla en la parte superior vale 50 unidades o 5 decenas, y así sucesivamente. En los esquemas de la parte inferior se representaron el número 6 y 54, respectivamente.



El ábaco Kramer (es una adaptación del ábaco japonés o Soroban), está diseñado para que las personas ciegas o débiles visuales puedan utilizarlo. Esta adaptación consiste en la colocación de un respaldo acojinado que actúa como freno, para que las cuentas no cambien de posición, lo anterior permite que las cantidades se puedan leer al tacto sin alterarse. Esta adaptación se puede realizar también en el **ábaco chino** y en el de **diez cuentas**.

La forma en que está construido este ábaco, no permite deducir los valores de cada una de las cuentas; los valores tienen que ser informados a quien va a utilizarlo. Se recomienda utilizar este ábaco con alumnos de sexto grado quienes ya tienen un buen manejo de las propiedades del sistema de numeración decimal.

## **DIDÁCTICA DE LOS ÁBACOS**

---

**E**n el apartado anterior se han hecho algunas recomendaciones sobre qué alumnos pueden utilizar cada uno de los ábacos. En este apartado se ofrecerán sugerencias concretas para utilizar este instrumento.

Se considera que el enfoque didáctico para enseñar y aprender matemáticas propuesto por la Secretaría de Educación Pública (Plan y programas para la educación primaria 1993), es una buena propuesta para que los niños aprendan matemáticas, es decir, la resolución de problemas como el medio y fin para aprender matemáticas; entonces el uso del ábaco en aula debe estar inscrito entre las sugerencias didácticas que se derivan de este enfoque.

Las siguientes son las ideas centrales que caracterizan el enfoque de la resolución de problemas propuesto para la enseñanza de las matemáticas:

### **La resolución de problemas permite:**

- Dar sentido al aprendizaje de las matemáticas. Se trata de que los problemas sean de interés para el niño, que le impliquen un reto. Reto al que pueda responder con los conocimientos de que dispone.

- Favorecer la solución de los problemas mediante procedimientos que la escuela no enseña, pero dar pautas para que esos procedimientos evolucionen a aquellos que se consideran formales.
- Establecer la oportunidad para que los niños expongan sus puntos de vista y defiendan con argumentos, las ideas que les llevaron a solucionar el problema.
- Considerar el error como una fuente de aprendizaje. Generalmente para dar con la solución de un problema los alumnos se equivocan, pero si el problema ha sido bien elegido, brinda al niño los elementos para que él mismo se dé cuenta de su error y cuando se expone ante los demás compañeros cómo se abordó el problema, ellos mismos señalan el error y sugieren formas de corregirlo.
- Favorecer el desarrollo de la autoestima. Los alumnos tienen la posibilidad de abordar el problema con sus propios procedimientos y con los conocimientos que poseen, lo cual les brinda cierta seguridad en lo que hacen.

### **El papel del profesor**

El enfoque redefine el hacer y quehacer del profesor. En este enfoque:

- Elige o diseña los problemas que planteará a sus alumnos.
- No sólo maneja el contenido matemático que quiere que sus alumnos aprendan; también conoce paulatinamente lo que sus alumnos pueden hacer ante un determinado problema, hace las sugerencias convenientes para que los alumnos aborden el problema, encuentren otras estrategias de solución o, para que identifiquen algún error.
- Organiza al grupo, ya sea en pequeños equipos o individualmente, para que resuelvan el problema elegido.
- Favorece la discusión de las ideas que les guiaron para resolver el problema en un ambiente de respeto, ya sea con todo el grupo o en equipos.
- Plantea preguntas que lleven a sus alumnos a la reflexión del por qué de sus respuestas o aun de las preguntas que los propios alumnos formulen.

## **El papel de los alumnos**

Una idea fundamental del enfoque es que los alumnos se responsabilicen paulatinamente de su aprendizaje, es decir, se trata de que el conocimiento sea resultado de un proceso en el cual el alumno busca dar respuesta a

una situación que el profesor le ha planteado, pero que él ha asumido como propia.

Es claro que el papel del alumno está mediado por el del profesor: si se le pide que esté sentado en su sitio, que no hable, que resuelva la situación mediante el procedimiento que el profesor haya enseñado, etcétera, el alumno (al menos ante la vista del profesor) hará lo que se le pide.

En el planteamiento de la resolución de problemas los alumnos:

- Resuelven los problemas utilizando sus conocimientos y los procedimientos que ellos consideran convenientes.
- Dan a conocer a sus compañeros el procedimiento que utilizaron para resolver el problema.
- Discuten, mediante argumentos, las ideas que siguieron para resolver el problema.
- Registran en sus hojas la información que generan para resolver el problema y después la analizan para llegar a conclusiones.
- Respetan las ideas de sus compañeros.

## EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

---

Las ideas que involucran el manejo del ábaco están íntimamente relacionadas con las propiedades del Sistema de Numeración decimal, por ello conviene hacer algunas consideraciones a este respecto.

El Sistema de Numeración es un conjunto de símbolos y reglas, éstas últimas determinan como combinar los símbolos para construir los numerales que son la representación simbólica de los números.

La metodología que la SEP ha propuesto para la enseñanza del Sistema de Numeración se explicita en los diferentes documentos que ha elaborado para apoyar el trabajo de los profesores, entre otros los Programas, los libros de texto gratuitos, los libros para el Maestro, etc.

Para la enseñanza del Sistema de numeración hay que tomar en cuenta dos aspectos importantes: La *variabilidad matemática* y la *variabilidad material*. La primera consiste en modificar los aspectos no esenciales de una estructura matemática que permita facilitar la abstracción de lo esencial como lo único que permanece invariable, por ejemplo en los sistemas de numeración de base posicional: la ley de cambio, el uso del cero o la escritura posicional.



La *variabilidad material* se refiere a las diversas formas en que se puede concretar una misma estructura matemática, en el caso del Sistema de Numeración:

- El dinero: 1 unidad = 1 moneda de un \$1 peso  
1 decena = 1 moneda de \$10 pesos  
1 centena = 1 billete de \$100 pesos  
si existieran, entonces podríamos decir:  
1 unidad de millar = 1 billete de \$1000 pesos
- Palitos sueltos (representan unidades), atados de 10 palitos (decenas), atados formados con grupos de 10 palitos (centenas), etcétera.
- El ábaco, entre otros.

Para la enseñanza del sistema de numeración se recomienda utilizar en primer lugar, aquellos materiales que permitan establecer de manera clara la convención de la regla de cambio, por ejemplo, palitos sueltos y atados de 10 palitos. Este tipo de material permite comprender las reglas de equivalencia: 10 a 1 y 1 a 10.

En un segundo momento es pertinente utilizar un material que en sí mismo sugiera la ley de cambio, por ejemplo el material que se propone en el libro de texto gratuito de segundo año: cuadritos, tiras y cuadrados (donde diez cuadritos forman una tira y diez tiras un cuadrado). Este tipo de material permite que los alumnos reafirmen la ley de cambio.

En un tercer momento conviene utilizar un material que no sugiera la ley de cambio, por lo que es necesario establecer una convención, por ejemplo, en el dinero: monedas de un peso, de diez pesos y billetes de cien pesos o el ábaco son materiales adecuados para ese propósito.

Siete ideas que llevan a una buena comprensión del sistema de numeración decimal:

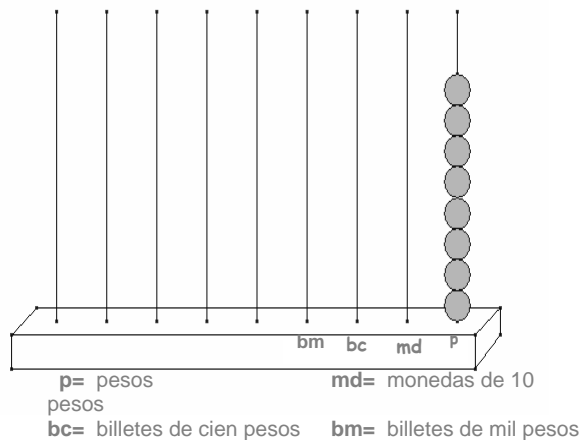
- El *agrupamiento*
- El *desagrupamiento*
- El *conteo*
- La *representación simbólica* de cantidades
- La *decodificación* de una representación simbólica.

El *agrupamiento* y el *desagrupamiento* están ligados a las relaciones fundamentales del sistema de numeración, es decir, diez "unidades" de un determinado orden se deben cambiar por una "unidad" del orden inmediato superior y viceversa.

El **ábaco de cuentas externas** puede constituirse como una herramienta didáctica que mediante su uso adecuado, permite a los niños comprender las relaciones fundamentales del sistema de numeración (10 a 1 y 1 a 10). Este ábaco puede servir para realizar diversas actividades como la del "**cajero**", que se encuentra en el fichero de actividades didácticas de primer grado elaborado por la SEP. En esta situación las cuentas registradas en el lugar de las unidades del ábaco, pueden representar monedas de un peso, las cuentas que se registran a la izquierda, monedas de 10 pesos; y.

sucesivamente las demás cuentas pueden representar billetes de 100 pesos, etcétera.

Para trabajar con niños ciegos es necesario escribir en el ábaco la letra (en Braille) que corresponda a las "unidades" del sistema que se vaya a utilizar, esto es, si la referencia es monedas, entonces habría que anotar en el ábaco como se indica en la siguiente figura:



Por otro lado, también se requiere, a partir de las situaciones de *conteo* ascendente y descendente, indicar a los niños la forma de registrar cantidades en este ábaco, esto es, al realizar los registros de los resultados del conteo es necesario seguir las reglas establecidas para registrar cantidades (*ver página de este folleto*).

El *conteo*. Hay varias situaciones que se pueden desarrollar para que los niños cuenten: comparar colecciones, igualar colecciones, repartir colecciones, construir una colección, cuantificar una colección. La idea fundamental es que a partir de situaciones como las señaladas anteriormente, los niños establezcan correspondencias uno a uno entre los objetos de una colección y los números que nos sirven para contar. En el siguiente apartado utilizaremos una situación de conteo para mostrar cómo se representan cantidades en los ábacos.

El **ábaco de diez cuentas** es otro instrumento adecuado para que los niños comprendan las ideas relacionadas con el *agrupamiento* y el *desagrupamiento*. Para utilizarlo con niños ciegos es necesario pegar al ábaco una plancha de plástico flexible de manera que ésta impida que las cuentas se muevan por sí solas.

El manejo de este ábaco requiere tener una cierta comprensión de las dos propiedades fundamentales del sistema de numeración decimal, su uso puede coadyuvar a ese propósito.

De igual forma que en el ábaco de cuentas externas, es necesario partir de situaciones de conteo, e indicar a los niños las reglas para registrar cantidades:

Si bien es cierto, que el Sua Pan o ábaco Chino es un ábaco que permite comprender las relaciones 10 a 1 y 1 a 10 del Sistema de numeración decimal debido a la triple relación de las cuentas de éste ábaco (cinco

cuentas en un eje se deben cambiar por una cuenta del nivel superior de la mismo; dos cuentas del nivel superior deben cambiarse por una cuenta del nivel inferior, pero en el eje inmediato a la izquierda. De acuerdo a las dos relaciones anteriores se encuentra que una cuenta de la parte inferior del ábaco es equivalente a 10 cuentas de la columna inmediata a la izquierda); no ayuda a que se comprendan de forma sencilla las ideas de agrupamiento y desagrupamiento.

En relación con la *codificación* y *decodificación* de cantidades la representación en el ábaco, es en sí misma una forma de "escritura", por lo que en situaciones donde los niños solicitan a través de un mensaje una cantidad de objetos a otro u otros niños, es una actividad que permite observar si los niños comprenden cómo "escribir" cantidades; asimismo, cuando tienen que enviar la cantidad de objetos que se le pide mediante un mensaje, se observa si los niños saben cual es la cantidad que está representada en el ábaco.

Para codificar y decodificar cantidades, cualquier ábaco puede ser útil, sin embargo, para cada grado se recomienda utilizar el ábaco que se ha sugerido en páginas anteriores.

Finalmente, se recomienda adecuar y realizar con el ábaco, algunas de las actividades que se encuentran en el libro Sistema de Numeración Decimal publicado por la Dirección General de Educación Especial (DGEE), México 1987.

En el contexto de los planteamientos anteriores, el profesor no encontrará en lo que sigue un manual para utilizar alguno de los cuatro ábacos. El propósito es ofrecer una serie de situaciones que por un lado brinden a los profesores elementos que lleven al dominio didáctico de cada uno de los ábacos y por otro, cuenten con algunas actividades que están diseñadas para ser trabajadas con los niños.

Es importante señalar que se hará referencia a los cuatro ábacos, por lo que convendrá tenerlos a la mano para realizar las actividades que se proponen, de manera que se puedan determinar las diversas ventajas didácticas que ofrece cada uno de ellos.

## EN SITUACIONES DE CONTEO, APRENDAMOS A REPRESENTAR CANTIDADES

---

**C**onsideremos la siguiente situación: Se tiene en un frasco entre 20 y 30 maíces (para alumnos de primero o segundo grado, y para alumnos de tercero y cuarto entre 100 y 200 maíces). Se trata de contar uno a uno los maíces que hay en el frasco.

Se pide a los alumnos que por cada maíz que hay en el bote pongan una cuenta en el lugar de las unidades y digan cuántos maíces hay en el bote.

A partir de esto, se trata de que los niños vayan sacando un maíz y en su ábaco pongan una cuenta en el lugar de las unidades, es decir, donde las cuentas valen uno. Aunque la situación está planteada para alumnos de primer a cuarto grado, veamos algunas formas en que los niños pueden proceder para resolver este tipo de situaciones utilizando cada uno de los cuatro ábacos; asimismo, se darán algunas sugerencias para auxiliar a aquellos niños que así lo requieran.

### Ábaco de Cuentas Externas

Una dificultad posible es que los niños no hagan la correspondencia entre maíces y cuentas de manera adecuada, por lo que el profesor debe estar atento al momento en que los niños van introduciendo las cuentas. Seguramente los niños no tendrán dificultad hasta que

lleguen a tener nueve cuentas, pero al incorporar la siguiente cuenta, algunos niños no harán el cambio respectivo; de manera que quizás la siguiente cuenta la pongan en el lugar de las decenas, pero considerándola como uno. En esta situación el profesor deberá recordar a los niños la regla de cambio.

Para ayudar a los niños a que estén atentos para hacer el cambio, en el desarrollo de la actividad el profesor puede hacer preguntas como las siguientes:

- ¿Cuántas cuentas han puesto?
- ¿Cuántas cuentas les faltan para tener 10?
- Si tienen 10 cuentas, ¿por qué las deben cambiar?
- ¿Dónde tienen que colocar la cuenta que vale las diez cuentas que van a cambiar?

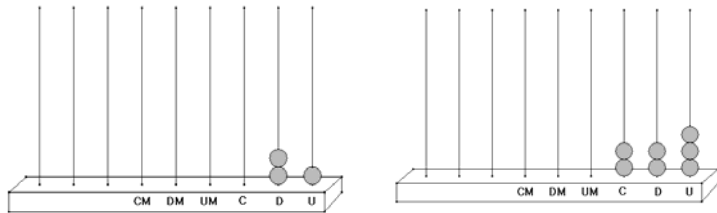
Como puede observarse, es importante que los alumnos tengan en mente lo que falta a un cierto dígito para obtener 10, o dicho de otra forma: tener presente la descomposición del número 10 como suma de dos dígitos; lo anterior les ayudará que estén atentos cuando haya que realizar el cambio respectivo. Por tal razón, conviene realizar diversas actividades que lleven a los alumnos a un buen manejo de la descomposición del número 10.

Por otra parte, será conveniente proponer a los alumnos que primero anticipen cuál será el número que quedará registrado en el ábaco y posteriormente, mediante el procedimiento que hayan elegido, comprueben el resultado. La anticipación hará que los niños establezcan



relaciones aditivas o sustractivas mentalmente, es decir, anticipen de forma mental el resultado. Cabe señalar que la estimación es una habilidad que los niños ciegos desarrollan casi de manera natural y que por otro lado, lleva a desarrollar estrategias que les permitirán abreviar cálculos.

A partir de lo expuesto anteriormente, los alumnos podrán representar la cantidad de maíces que se hayan puesto en el bote, por ejemplo si se pusieron 21 o 223 maíces se tendrán en el ábaco de cuentas externas como se muestra a continuación:



Una situación que se puede realizar de manera paralela es la siguiente: Se propone a los niños que coloquen los grupos de diez maíces un una bolsita, y cuando se tengan 10 bolsitas, éstas se ponen en una bolsa más grande; de esta manera en el primer caso tendrán dos bolsitas con 10 maíces cada una y un maíz suelto. En el segundo se tendrán dos bolsas que tendrán cada una 10 bolsitas; así como dos bolsitas de 10 maíces cada una y tres maíces sueltos.

La situación anterior permitirá a los niños comprender lo que está representando cada una de las cuentas en el ábaco.

### **Ábaco de Diez Cuentas**

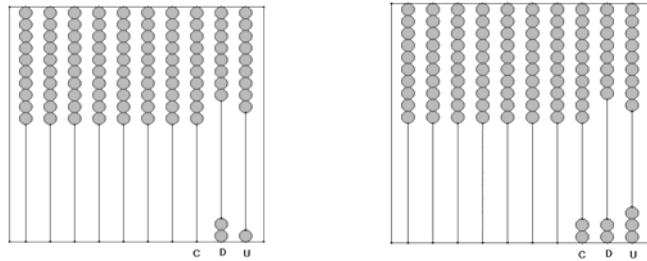
Es necesario indicar a los niños que todas las cuentas del ábaco deben estar en la parte superior, y después, para hacer el registro se vayan bajando una a una las cuentas que valen uno. Este ábaco no permite extraer las cuentas de las varillas, por tal razón es más fácil que los alumnos que no han comprendido la idea de cambiar las 10 unidades por una decena, cuando hayan quitado diez unidades, bajen una cuenta del eje de las decenas, como si ésta representara una unidad.

Será necesario que el profesor les recuerde la regla de cambio, que el alumno comprenda que si no ha hecho el cambio, no puede bajar una cuenta de las que están en el lugar de las que valen diez (decenas).

Le sugerimos que realice la acción de contar de uno en uno para registrar 21 maíces. Recuerde: tiene que ir haciendo los cambios.

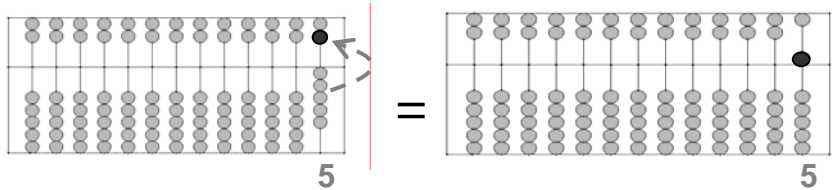
Para registrar 223 puede proceder de otra manera. ¿Cuántas cuentas que valen uno habrá bajado si baja una cuenta de las decenas?

Entonces a partir de que tenga una cuenta en el lugar de las decenas, baje cada vez una decena y cuando tenga 10 decenas haga el cambio respectivo. Es posible que los niños descubran esta posibilidad, es decir, juntar 10 frijoles, colocarlos en una bolsita y después bajar la cuenta que vale 10, si no fuera el caso, se puede hacer la sugerencia y cuestionarlos para constatar que han comprendido lo que significa bajar una cuenta de las decenas.

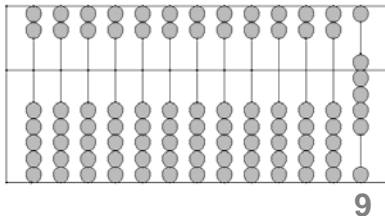


## Ábaco Chino

Supongamos que hemos sacado del bote cinco maíces, entonces en el ábaco tendremos registrado como se muestra a continuación:

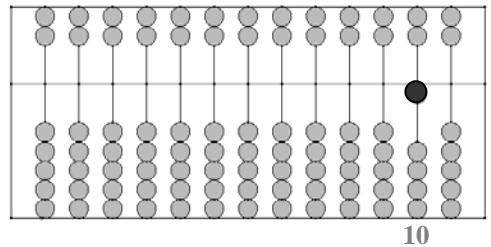
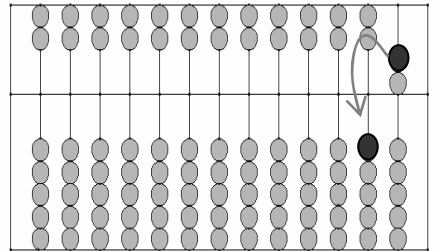
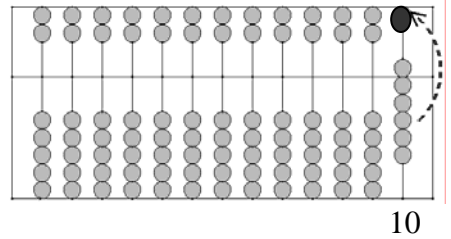


Si recordamos que no se pueden tener las cinco cuentas, necesitamos cambiarlas por una de las cuentas que se encuentra en la parte superior de la misma columna. De esta manera, al hacer el cambio respectivo, de la parte superior bajamos una cuenta y de la parte inferior bajamos las cinco cuentas.



En este ábaco se ha anotado la cantidad de nueve maíces. Al registrar el décimo maíz se tendrá que realizar el canje, como se muestra en los esquemas siguientes:

Se ha bajado la otra cuenta que se encuentra en la parte superior de la misma columna y se han bajado las cinco cuentas. Pero recordemos que en la parte superior no podemos tener dos cuentas abajo, es necesario cambiarlas por su equivalente, esto es: por una de las cuentas del lugar de las decenas. Entonces se quitan las dos cuentas y se sube una de las cuentas de las decenas. El resultado quedará como se muestra:

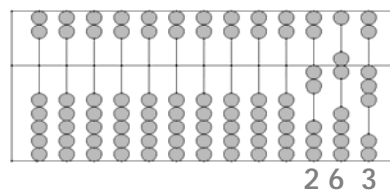


De forma análoga se registra cualquier otra cantidad. Conviene recordar a los alumnos el momento en el que tienen que hacer el cambio. Las siguientes preguntas pueden ayudar:

- ¿Cuántas te faltan para cambiar por una cuenta de "arriba"?
- ¿Puedes tener dos cuentas en la parte superior de alguna columna?
- Dos cuentas que hayas bajado en la columna de arriba, ¿por qué las debes cambiar?
- Una cuenta de esta columna (por ejemplo las centenas) ¿cuántas cuentas representan de esta columna (las decenas)? y ¿cuántas de las unidades?

Cuando los alumnos se dan cuenta de que cada una de las cinco cuentas de una columna de la parte inferior del ábaco es equivalente a 10 cuentas de la columna inmediata a la derecha, entonces podrán contar de diez en diez, y así subir una cuenta de las decenas es equivalente a tener 10 cuentas de las unidades, o subir una cuenta de las centenas es equivalente a tener 10 cuentas de las decenas.

Se ha sugerido utilizar este ábaco con alumnos de quinto o sexto grado porque se puede considerar que ya manejan las propiedades básicas del Sistema de numeración decimal. La representación del número **263** deberá ser:

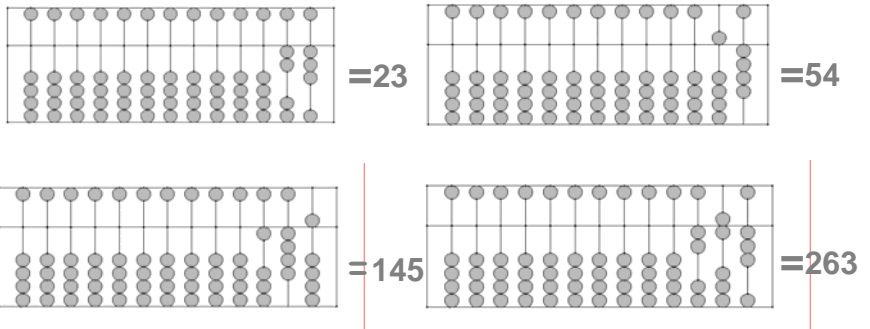


## Ábaco Japonés

En este ábaco, como se ha señalado en el primer apartado, se tiene que dar a conocer a los niños el valor de las cuentas según su posición en cada columna y si está en la parte superior o inferior del ábaco. A partir de este conocimiento es posible representar una cierta cantidad, pero necesitamos considerar que cada cuenta que está en la columna de la derecha del ábaco, en la parte inferior, vale uno y la que se encuentra en la parte superior de la misma columna vale 5.

En los siguientes ábacos se han representado las siguientes cantidades:

**23, 54, 145 y 263**



Una situación más interesante que permitirá acercarnos al descubrimiento de un algoritmo para sumar es contar de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etcétera.

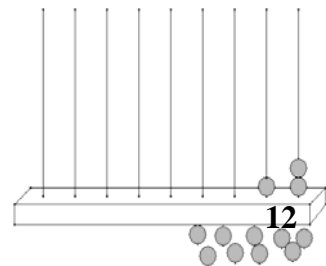
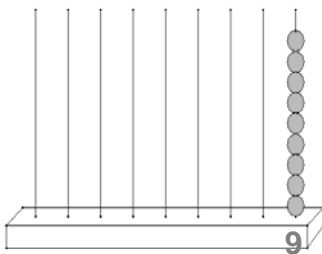
## Ábaco de Cuentas Externas

Consideremos la situación de contar maíces de tres en tres:

No se tendrá ningún problema hasta tener nueve cuentas en las unidades; cuando se va a agregar la cuarta vez 3 unidades, entonces se observará que sólo se puede agregar una cuenta. Algunos niños quizás pongan las otras dos cuentas en el lugar de las decenas; en tal caso será necesario plantear alguna pregunta que les haga reflexionar acerca del valor de esas cuentas, de tal forma que se den cuenta que tienen que cambiar las 10 unidades por una cuenta que se coloca en el lugar de las decenas.

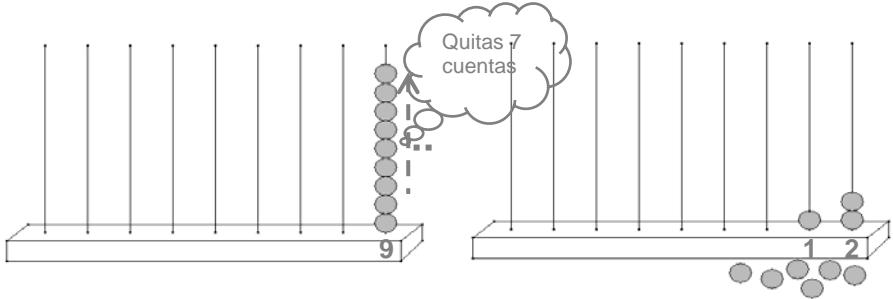
En caso de que los niños tengan claro la relación 10 a uno, pueden proceder de dos formas:

1. Tienen en mente que falta una cuenta para tener diez, entonces sacan las nueve cuentas, meten una en la columna de las decenas y dos en la de las unidades. ¿Por qué es válido este procedimiento? El resultado se muestra a continuación:





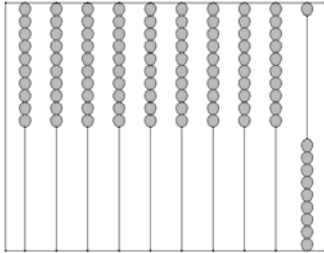
2. En lugar de sacar las nueve cuentas quitan siete y ponen una cuenta en el lugar de las decenas. El registro quedará como se muestra a continuación:



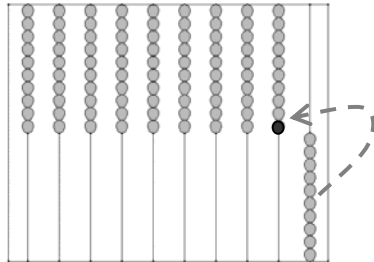
Al continuar con el registro, se llegará a la situación en que se tengan 8 cuentas en la columna de las unidades. Para agregar las tres cuentas, los niños pueden proceder de manera análoga, como se señaló antes; aunque en este caso se necesita tener en mente que faltan dos cuentas en las unidades para después hacer el cambio por una decena.

### Ábaco de Diez Cuentas

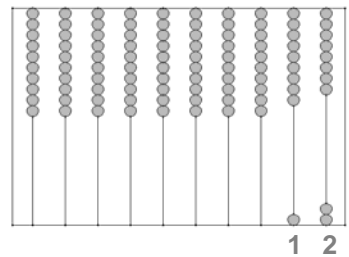
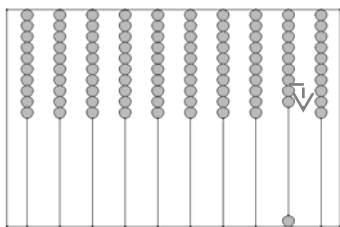
Como en el caso del **ábaco de cuentas externas**, en este ábaco el problema para registrar la cuarta vez tres unidades es similar. Antes de continuar la lectura, le sugerimos que busque la forma de hacer el registro. Se puede realizar de dos formas:



1. Bajar la cuenta, luego cambiar las diez cuentas por una decena (lo que significa bajar la cuenta de la columna de las decenas) y luego bajar dos cuentas de las unidades.

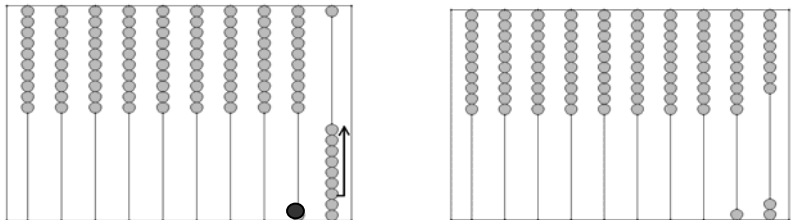


Finalmente...



2. El segundo procedimiento implica un manejo de las dos relaciones fundamentales (10 a 1 o 1 a 10) del sistema de numeración decimal.

Observamos que bajar la cuenta de las decenas es equivalente a bajar 10 unidades dado que sólo se necesita bajar tres unidades, hay que regresar siete de las cuentas (unidades) que se tienen en el ábaco. En las dos figuras siguientes se ilustra el procedimiento:



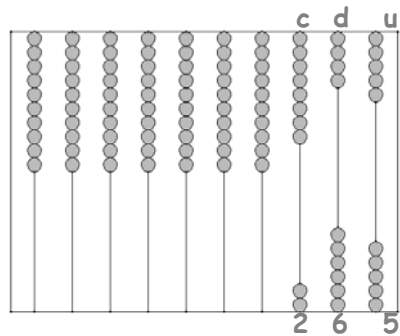
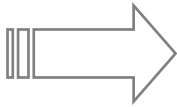
Bajar una cuenta del eje de las decenas y quitar siete cuentas de la columna de las unidades.

En este procedimiento hay en juego dos operaciones, sumar y restar: agregar 10 unidades, a través de agregar la decena y después restar (quitar) 7 unidades, ya que sólo se necesita agregar 3 unidades. Si bien es cierto que esta forma de resolver la situación es más elaborada, resulta ser de utilidad para resolver otras operaciones un tanto más complicadas, como lo veremos más adelante.

Si el frasco tuviera 265 maíces, entonces, es mejor contar de 10 en 10. Así se puede bajar cada vez una cuenta que esté en el lugar de las decenas y cuando sea necesario proceder como se ha indicado para el caso de las unidades.

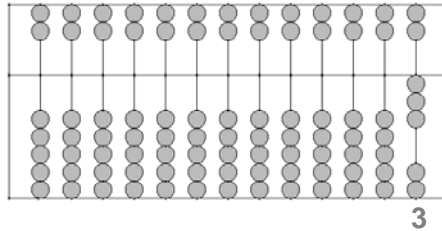
En ocasiones, para que los niños relacionen las cuentas del ábaco con la cantidad de maíces que representan, será conveniente contar los maíces haciendo bolsitas que contengan 10 maíces, así como bolsas que contengan 10 bolsitas con 10 maíces cada una.

En el ábaco se obtendrá el siguiente registro:

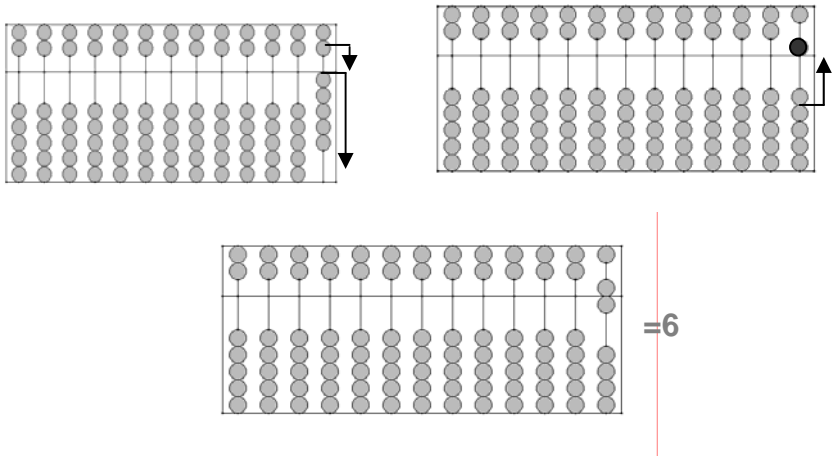


## Ábaco Chino

Supongamos que se van a registrar 26 y 265 maíces de tres en tres. En el primer caso, sin problema alguno podemos registrar 3 maíces. Para registrar el segundo trío de maíces, podemos proceder de dos maneras:



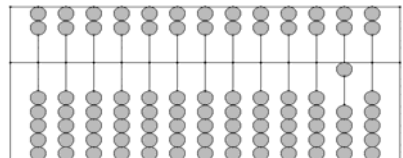
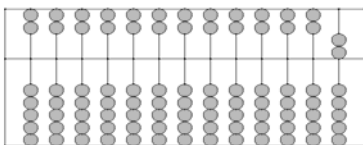
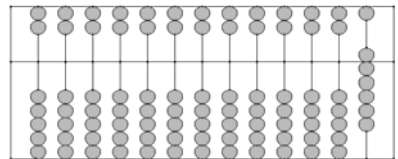
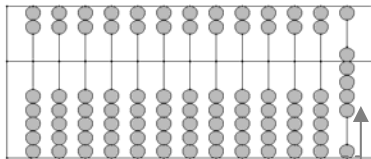
1. Agregar dos cuentas de las unidades, hacer el cambio por una de las cuentas que están en la misma columna (significa quitar las cinco inferiores cuentas y bajar una de las cuentas de la parte superior) después agregar una cuenta inferior (es la que falta para registrar los tres maíces). En los siguientes ábacos se ilustra paso a paso el procedimiento.

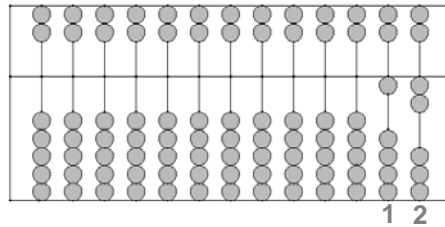


2. También podemos bajar una de las cuentas de la parte superior de la columna de las unidades y después bajar dos cuentas de las unidades que se tienen registradas. Esta forma de realizar la operación es esencialmente el segundo procedimiento que se mostró para el caso del ábaco de 10 cuentas; es decir, al bajar una cuenta de la parte superior es equivalente a subir cinco cuentas de las de abajo (de la misma columna).

Registrar nueve maíces no presenta dificultad alguna, para registrar otros tres, hay necesidad de poner en juego la relación 2 a 1 y 1 a 2 que hay entre las cuentas de la parte superior de cualquier columna y una cuenta de la parte inferior de la columna inmediata a la izquierda.

En los siguientes ábacos se ilustra la secuencia para realizar el registro de 12 cuentas:

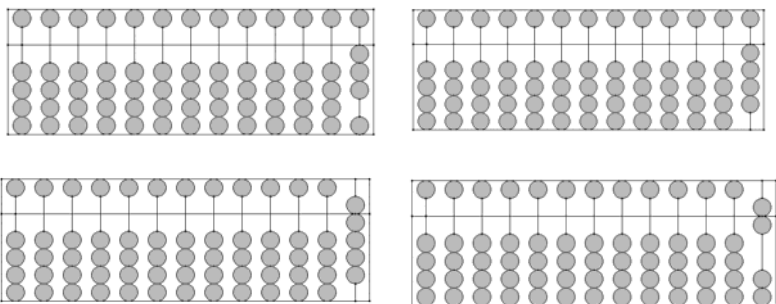




A partir de las ideas expuestas anteriormente, podemos registrar las cantidades que se quieran.

## Ábaco Japonés

Para hacer el registro de tres en tres en el ábaco japonés es necesario realizar dos acciones: agregar y quitar. El registro de los primeros tres maíces no representa problema alguno, para registrar las siguientes tres cuentas sólo podemos subir una cuenta, entonces para registrar las otras dos cuentas, tenemos que bajar la cuenta que vale cinco y después necesitamos quitar tres cuentas, como se muestra en la siguiente secuencia de ábacos.



Observemos que las acciones de agregar y quitar la podemos realizar sin necesidad de agregar primero la cuarta cuenta. ¿Qué sucede si baja la cuenta que está sobre las tres cuentas? De las cuentas que están en la parte inferior de la misma columna ¿cuántas cuentas tendría que bajar de la misma columna?, ¿por qué?

### **Conteo descendente**

Consideremos la siguiente situación: Luis tiene en su alcancía 2 monedas de diez pesos y 6 monedas de un peso. Diariamente va a tomar un peso. Si hoy empieza a tomar su moneda, ¿para cuántos días le alcanza?

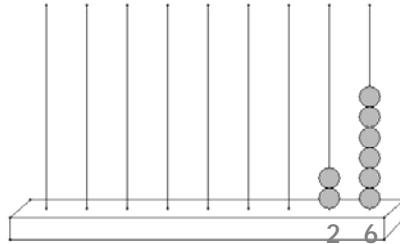
Para realizar la actividad es importante que los alumnos tengan idea de cómo representar una cantidad en el ábaco. Si tienen alguna dificultad, se sugiere realizar algunas actividades que lleven a los niños a ese fin, por ejemplo, que utilicen el ábaco para enviar mensajes para solicitar a otros niños una cierta cantidad de objetos.

Veamos cómo pueden proceder los niños para resolver la situación.

### **Ábaco de Cuentas Externas**

Supongamos que los alumnos pueden representar la cantidad inicial en el ábaco:





Los alumnos no tendrán problemas para ir quitando las cuentas que representan las monedas de un peso; al llegar a la séptima vez, los niños encontrarán que ya no tienen cuentas que representen un peso. Aquellos que no manejen la relación 1 a 10 del sistema de numeración decimal, quitarán una de las cuentas de las decenas. En este caso, será necesario que el profesor haga el cuestionamiento necesario para que el niño comprenda que al quitar esa cuenta, en realidad está quitando 10 cuentas de un peso. Pueden ser de utilidad preguntas como las siguientes:

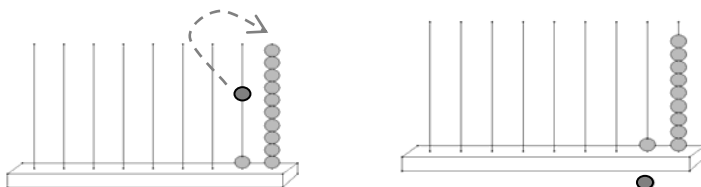
- Esta cuenta (las de las decenas) ¿qué tipo de monedas representa?
- ¿Te parece bien dar una moneda de diez, si te he pedido una moneda de un peso?, para estar “a mano” ¿cuántas monedas de un peso debo darte?
- Si cambias esta cuenta (de las decenas) por cuentas de esta columna (señalando donde se ubican las unidades), ¿cuántas te deben dar?

Una vez que han comprendido la relación 1 a 10 entre las cuentas de las decenas y las unidades, los alumnos seguramente cambiarán una cuenta de las decenas por las cuentas que corresponden a las unidades. Será conveniente proponer a los alumnos que primero estimen el resultado, y que posteriormente (mediante el procedimiento que hayan elegido) lo comprueben.

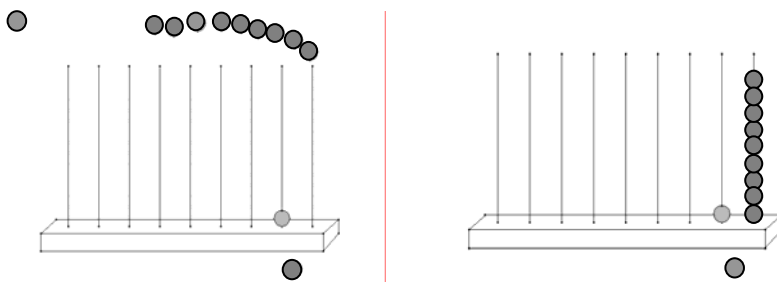
La estimación hará que los niños establezcan relaciones aditivas o sustractivas a nivel mental y por otro lado, les permitirá tener un parámetro con el cual confrontar el resultado que obtengan. Generalmente los niños cuando han hecho una cuenta, tienen que preguntar al profesor si su resultado es correcto; la estimación de un resultado ofrece al niño la posibilidad de verificar si el que obtuvo es razonable. Por ejemplo, muchos niños al restar  $100 - 9$  obtienen 109 (dicen 0 menos 9). Al hacer una estimación previa, el mismo niño podrá decir que el resultado tendría que ser menor a 100 y por lo tanto, él mismo diría que su resultado (109) es incorrecto.

Al momento de tener dos cuentas en las decenas, para realizar la acción de quitar una moneda de un peso, los niños pueden proceder de dos formas:

1. Cambiar (quitar) una cuenta de las decenas, poner 10 cuentas en las unidades y después quitar una de esas cuentas.



Otra manera de hacerlo, es cambiar una cuenta de las decenas por diez unidades. Sin introducir las cuentas en la varilla quitan una cuenta. Las sobrantes las meten en la columna correspondiente.



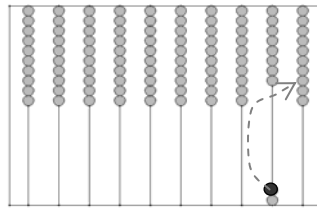
2. El segundo procedimiento tiene más ventajas, por ejemplo si tuvieran que restar a 23 1, 2, 3 ...o 9, cuentas notemos que al cambiar una decena por 10 unidades, si se juntan con las 3 que ya se tienen; el alumno dice: 13 menos el dígito de que se trate. En este caso los dedos de las manos no son suficientes para representar las 13 unidades; será necesario hacer dibujos.

Si se hace el cambio y a las 10 cuentas resultado de éste, se le resta el dígito de que se trate, los dedos de las manos permiten representar las 10 unidades, por lo que conocer la diferencia se facilita.

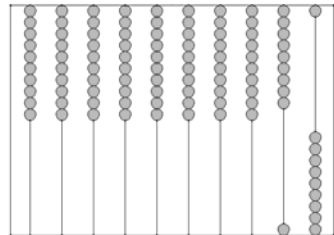
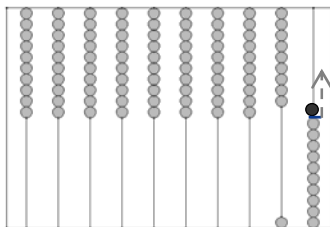
Si se ha trabajado con los niños situaciones problemáticas que lleven a restar un dígito a 10, entonces es posible que pongan en juego este segundo procedimiento.

## Ábaco de Diez Cuentas

En este ábaco, la dificultad se establece cuando los niños tienen las dos cuentas que representan dos monedas de 10 pesos y ninguna cuenta de un peso. Al igual que en el **ábaco de cuentas externas**, se pueden seguir los dos procedimientos anteriores. Aunque en este ábaco no será posible tener juntas más de 10 cuentas. A partir de la observación de las siguientes figuras, le sugerimos redactar los dos procedimientos que los niños pueden seguir para quitar una moneda de un peso a dos monedas de 10 pesos.

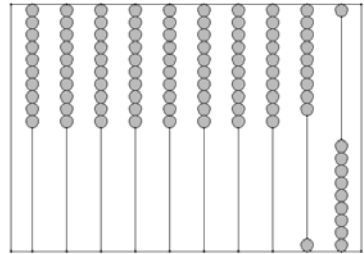
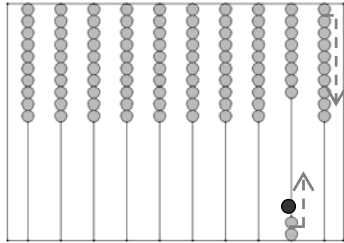


### Procedimiento 1



1 9

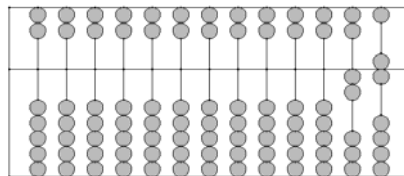
## Procedimiento 2



1 9

## Ábaco Chino

En el siguiente ábaco mostramos el registro del número 26.

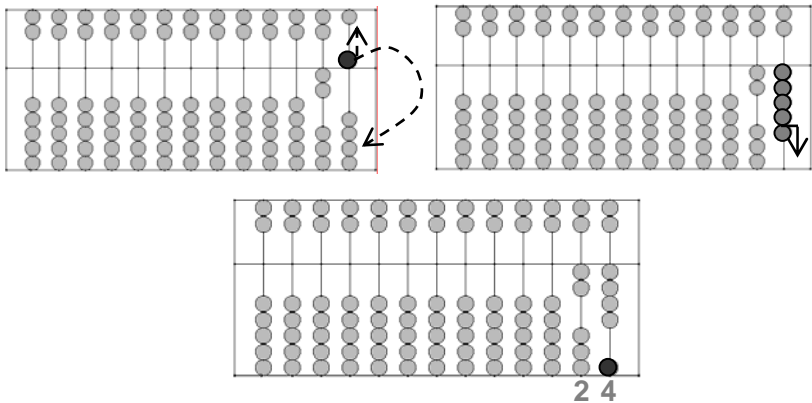


2 6

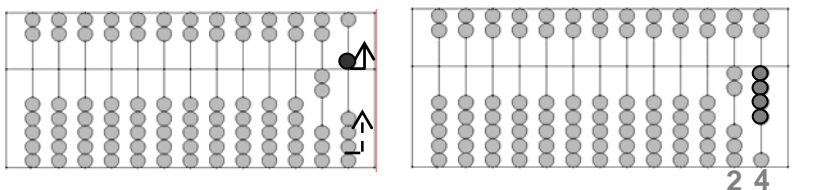
Quitar una cuenta que representa un peso no presenta dificultad alguna; para quitar la segunda, se necesita poner en juego la relación 1 a 5 que hay entre las cuentas de la parte superior e inferior del mismo eje.

En la siguiente sucesión de figuras se ilustran los dos procedimientos que se pueden seguir. Después de analizarlos, redacte cada uno de los procedimientos que se ilustran.

### Procedimiento 1



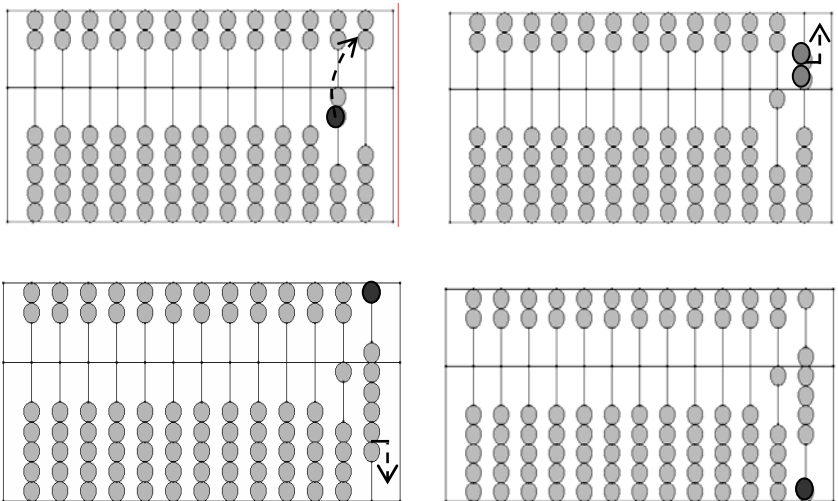
### Procedimiento 2



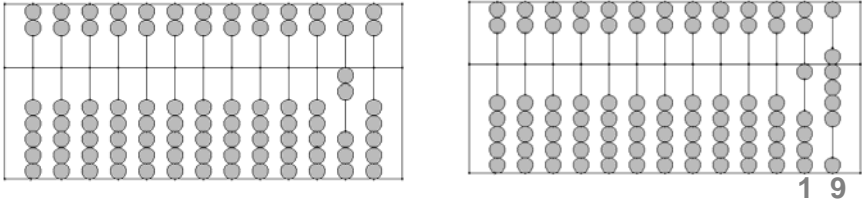
En este procedimiento la resta (5-1) se hace mentalmente y se registra el resultado en el ábaco.

Cuando se registran en el ábaco 2 monedas de 10 pesos y cero de un peso, se presenta otra pequeña dificultad: para quitar una cuenta que representa un peso, hay que tener presente la relación 1 a 2 entre las cuentas de la parte inferior y las cuentas de la parte superior de la columna inmediata a la izquierda, asimismo tener en cuenta la relación 1 a 5 entre una cuenta de la parte superior y las cuentas que se hallan en la parte inferior, pero de la misma columna. Analice las dos siguientes secuencias de ábacos en que se muestra la forma de quitar un peso y después haga una redacción para cada procedimiento.

### Procedimiento 1



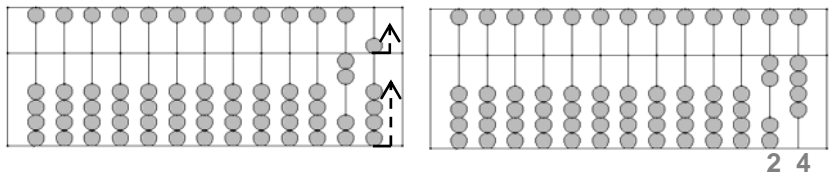
## Procedimiento 2



Observemos que en este procedimiento la resta ( $10-1$ ) se efectúa mentalmente y en el ábaco se registra la diferencia.

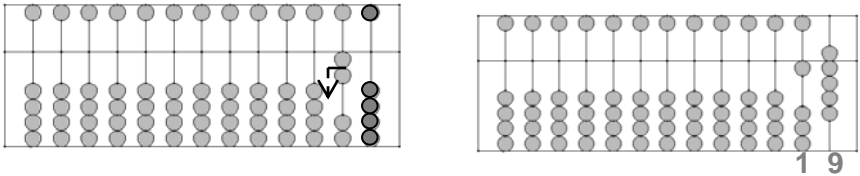
## Ábaco Japonés

En este ábaco la forma de ir quitando una cuenta, que representa una moneda de un peso, es similar al segundo procedimiento ilustrado para el ábaco chino. A continuación se ilustra la forma de proceder en este ábaco cuando se representan 2 monedas de 10 pesos y cinco de uno. Le sugerimos analizar y redactar la secuencia del procedimiento.





La siguiente secuencia muestra cómo quitar una moneda de un peso, cuando se tienen 2 monedas de 10 y ninguna moneda de un peso.



Como se ha mostrado, la situación de conteo es un medio muy rico para que los niños aprendan a representar cantidades y se aproximen a los algoritmos de las cuatro operaciones básicas. En el siguiente apartado explícitamente se desarrollarán algunas situaciones problemáticas que permiten abordar los algoritmos.

## ALGORITMOS PARA SUMAR CON ÁBACO

---

**E**n las situaciones relacionadas con el conteo hemos detallado las formas en que es posible llevar a cabo la representación de algunas cantidades. Por otra parte, las ideas ya expuestas serán de utilidad para resolver situaciones que se plantearán en este apartado, así mismo, permitirán establecer distintos procedimientos para sumar.

Existen diferentes tipos de problemas que se pueden resolver mediante la suma. A continuación se presentan algunos de ellos:

1. Juan tiene 14 dulces y su mamá le dio otros 13, ¿cuántos dulces tiene ahora Juan?
2. Juan tiene algunos dulces, su mamá le dio otros 13. Juan tiene ahora 27 dulces, ¿cuántos dulces tenía Juan antes de que su mamá le diera los dulces?
3. Juan tiene 14 dulces, él necesita 14 dulces para tener la cantidad de dulces que tiene su amiga, ¿cuántos dulces tiene su amiga?
4. Juan tiene 14 dulces, su amiga tiene 27 dulces, ¿cuántos dulces necesita Juan para tener la misma cantidad de dulces que su amiga?
5. Juan tiene 14 dulces, su amiga tiene 13 dulces más que Juan, ¿cuántos tiene su amiga?
6. Juan tiene 14 dulces, su amiga tiene 13 dulces, ¿cuántos dulces tienen entre los dos?

De los problemas anteriores el primero y el sexto permiten establecer una relación directa entre acciones concretas (tomar la cantidad de dulces que se dice primero, después agregar la segunda cantidad y finalmente contar el total de dulces) que dan solución al problema y las acciones que se ejecutan en el ábaco: se representa la primera cantidad, se agrega la segunda y se lee la cantidad resultante.

Por esta razón, conviene en un inicio plantear este tipo de problemas, más adelante se pueden ir proponiendo los demás problemas.

Antes de iniciar la exposición, queremos insistir en la necesidad de desarrollar la habilidad de la estimación; el desarrollo de esta habilidad permitirá, como lo hemos señalado, que los alumnos, en primer lugar, tengan un parámetro para compararlo con el resultado que se obtenga al efectuar el cálculo realizado con el ábaco.

En segundo, permite generar estrategias propias de cálculo. Veamos algunos procedimientos para estimar y aun para obtener resultados exactos. Consideremos la necesidad de estimar:

$$3879 + 5647$$

Algunas consideraciones podrían ser:

- a) El resultado es menor que 10000 y mayor que 8000, ¿por qué?

- b) El primer sumando lo podemos redondear a 4000, ¿por qué?, el segundo se redondea a 5500, ¿por qué?. Así el resultado es aproximadamente 9500.
- c) Si redondeamos 879 y 647 a 800 y 600, entonces  $800 + 600 = 1400$ . Al sumar a este resultado las unidades de millar obtenemos como estimación 9400.
- d) Si redondeamos 879 a 880 y 647 a 650 al sumar estas cantidades (relativamente es fácil hacerlo mentalmente) obtenemos 1530, entonces el resultado es aproximadamente 9530.

Algunas de las estimaciones anteriores son mejores que otras, pero todas nos indican al menos por donde "anda" el resultado. Así, al realizar la operación, podremos decir si nuestro resultado es o no el esperado.

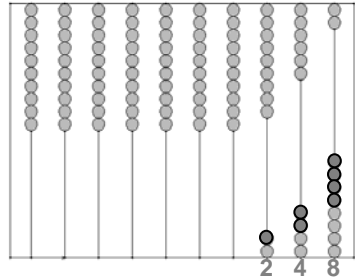
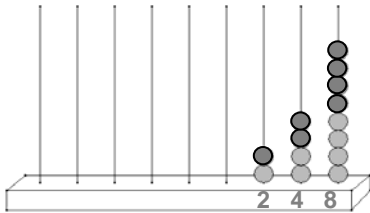
Para que observemos cómo es posible al utilizar el ábaco, descubrir o proponer distintos procedimientos para sumar; consideremos la siguiente situación: (de hecho se puede ver que es una situación de conteo). El papá de Luis desea juntar una cierta cantidad de dinero para llevar a su familia de vacaciones. Decide guardar cada semana 124 pesos. ¿Cuánto ahorrará en dos, tres, cuatro, cinco... semanas? ¿En cuántas semanas juntará más de 4000 pesos?

Veamos cómo resolver el problema en los diferentes ábacos: Representemos 124 en cada uno de ellos.

- ¿Cómo hacer para agregar los 124 pesos que corresponden a la segunda semana?, le sugerimos iniciar agregando las centenas, después las decenas y finalmente las unidades. ¿Tuvo algún problema?
- Vuelva a registrar el número 124 y ahora primero agregue las unidades, después las decenas y por último las centenas. ¿Obtuvo el mismo resultado que antes?

Efectuar las acciones anteriores en el **ábaco de cuentas externas** o en el **ábaco de 10 cuentas**, seguramente no le ocasionó ningún problema y obtuvo el resultado que se ilustra enseguida:

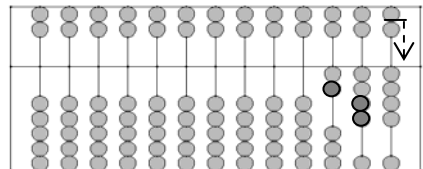
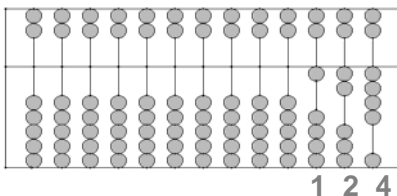
$$124 + 124 =$$



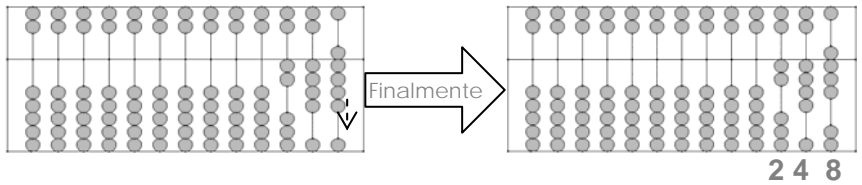
Quizás tuvo alguna dificultad en el ábaco chino, en el que necesitó poner en juego las relaciones entre las cuentas del ábaco, es decir, 5 a 1 y 2 a 1.

En el ábaco japonés hay que tener presente el valor de las cuentas y la relación 10 a 1.

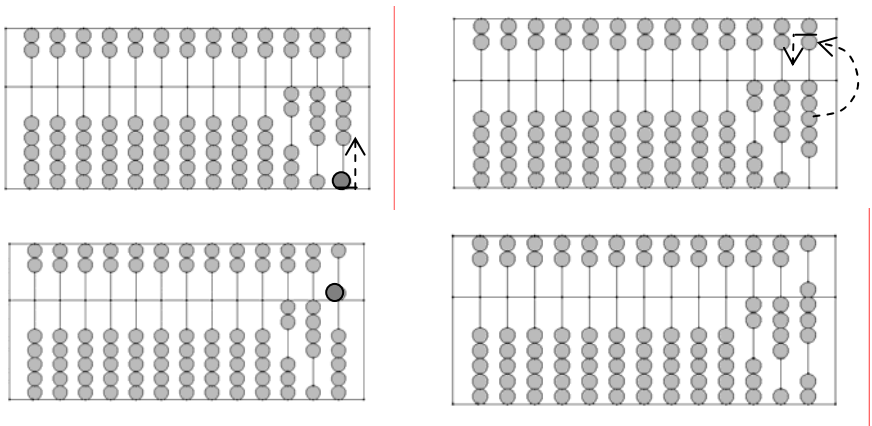
Veamos como se puede proceder en el ábaco chino. Primero se registra 124 y a continuación se agrega los otros 124, que corresponden a la segunda semana. Para el caso, vamos a iniciar agregando las centenas y luego las decenas. Hacer lo anterior no representa alguna dificultad. En las siguientes figuras se observa el resultado de agregar la centena y las dos decenas.



Para agregar las 4 unidades podemos agregar una cuenta de la parte superior de las unidades y luego quitar una cuenta de las que se encuentran en la misma columna, ¿por qué es correcto?



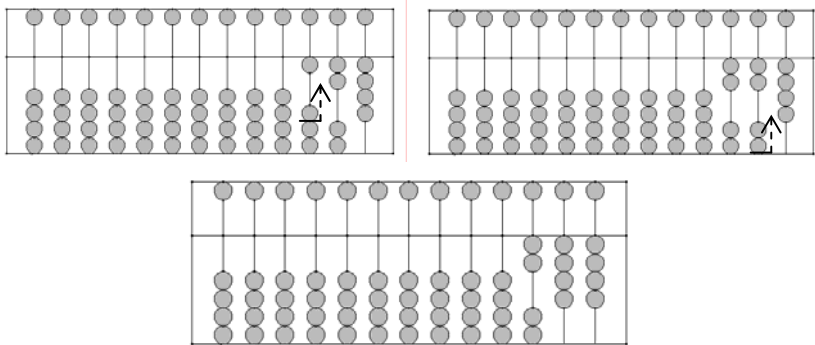
Otra manera de agregar las 4 unidades es como se ilustra en los siguientes esquemas. Le invitamos a redactar la descripción del procedimiento.



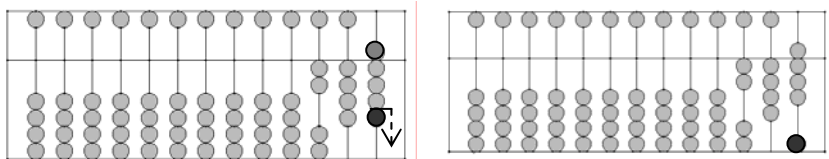
¿Qué procedimiento considera que los niños pueden utilizar de manera más natural?, ¿por qué?

En el **ábaco japonés** la forma de agregar 124 a 124 es similar a los dos procedimientos señalados para el ábaco chino. En las dos siguientes sucesiones de ábacos se ilustran los procedimientos. Para cada caso le invitamos a redactar cada uno de ellos. Cabe señalar que se inicia el procedimiento empezando por las centenas.

### Procedimiento 1



En los esquemas anteriores se han agregado la centena y las dos decenas. En los ábacos siguientes se muestra cómo agregar las 4 unidades faltantes.

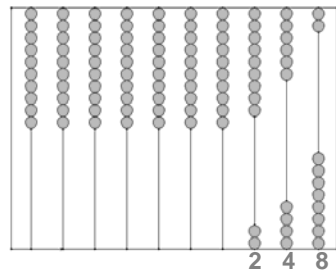




El ábaco de la izquierda muestra que se agregó la cuenta que está en la parte superior donde se ubican las cuatro unidades, ¿a cuántas unidades equivale esa cuenta? En el ábaco de la derecha se observa que se quitó una unidad, ¿por qué se quitó?

Veamos en el ábaco de diez cuentas cómo agregar los 124 que corresponden a la tercera semana.

Recordemos que llevamos ahorrados 248 pesos.

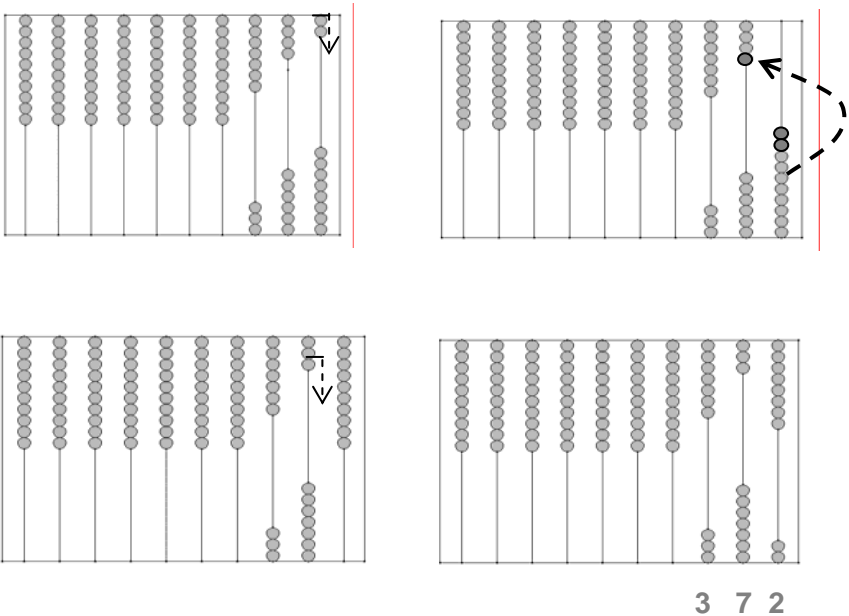


Para agregar los 124 iniciemos con la centena, luego las dos decenas y finalmente las unidades. La dificultad se presenta cuando se van a agregar las 4 unidades ya que sólo hay dos. Podemos proceder de dos formas:

#### Procedimiento 1

- Agregar dos unidades,
- después cambiar las diez unidades por una decena (se suben las diez unidades y se baja una decena) y,
- finalmente agregar las dos unidades que faltan.

En los siguientes ábacos se muestra paso a paso el procedimiento anterior. En el primero se observa que se han agregado la centena y las dos decenas.

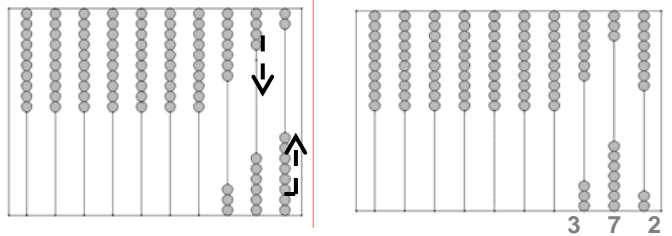


Le invitamos a redactar el procedimiento ilustrado en los ábacos anteriores.

## Procedimiento 2

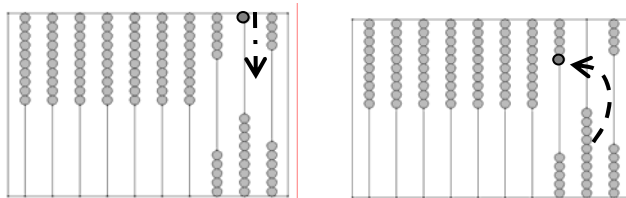
- Agreguemos una decena, ¿a cuántas unidades equivale?
- ¿Cuántas unidades tendríamos que quitar después de agregar la decena?

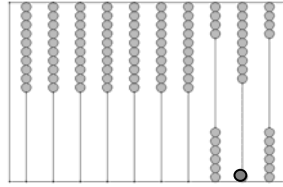
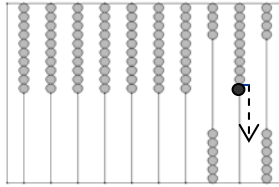
El procedimiento se ilustra a continuación:



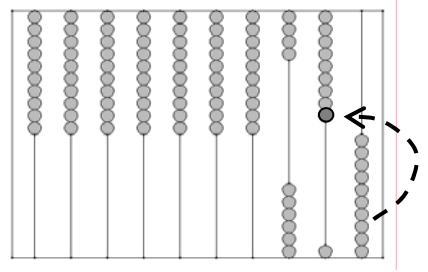
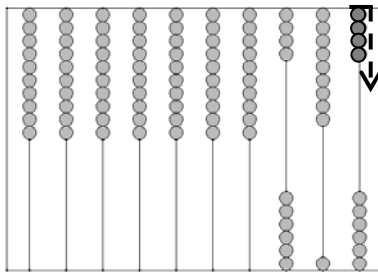
Cualquiera de los dos procedimientos nos conduce al resultado anterior, y podemos agregar sin ninguna dificultad otros 124, que corresponden a la cuarta semana; así obtendremos 496.

De nueva cuenta, al agregar otros 124, correspondientes a la quinta semana, observaremos que tendremos necesidad de cambiar decenas por centenas y unidades por decenas. En las siguientes sucesiones de ábacos se ilustra el proceso para agregar las 2 decenas. En el primer ábaco ya se ha agregado la centena, es decir, a 496 se le suma 100. Analice las sucesiones de ábacos y redacte el procedimiento para sumar las 2 decenas.

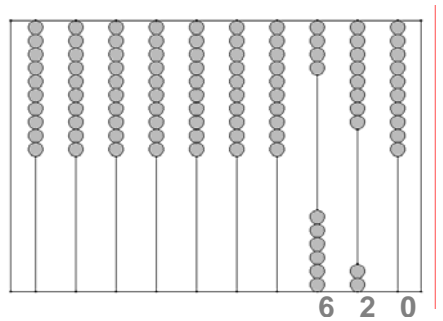




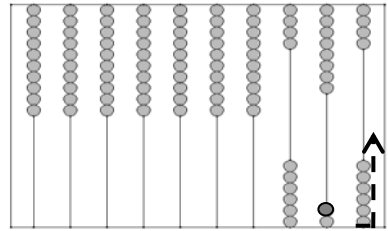
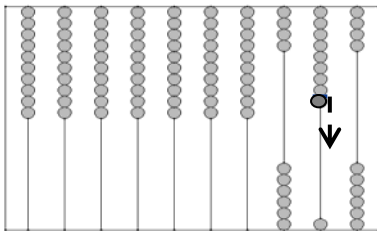
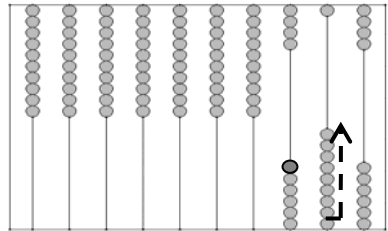
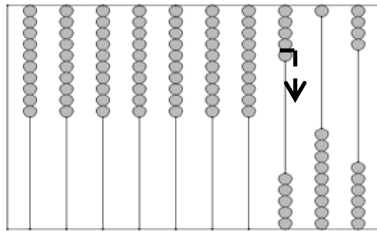
En los siguientes ábacos mostramos el procedimiento para agregar las 4 unidades:



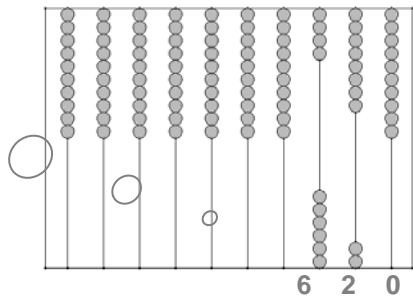
Finalmente obtuvimos...



Para agregar 124 a 496, recordemos que también podemos utilizar el segundo procedimiento descrito líneas arriba. Observe las siguientes figuras y describa el procedimiento. En el primer ábaco, a 496 se ha agregado la centena, por lo cual se registra 596.

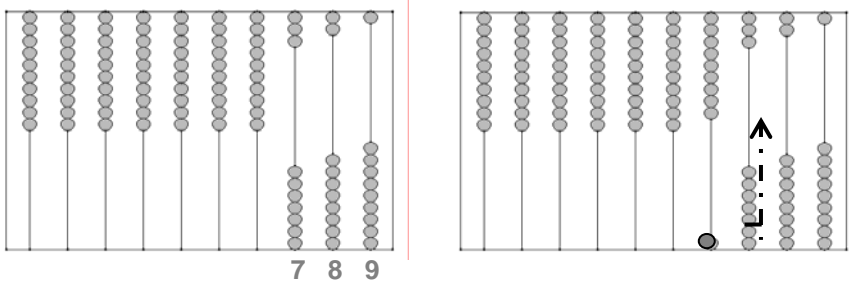


El resultado,  
como en el  
caso  
anterior es:

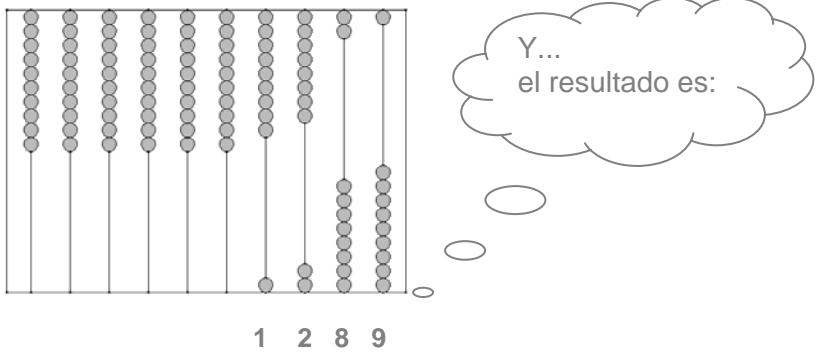


En general, el segundo procedimiento simplifica en tiempo la realización de cualquier suma que implica hacer cambios. Por otra parte, notemos que en el uso del ábaco no es necesario escribir cada uno de los sumandos, y luego efectuar la suma. Al registrar cada cantidad, simultáneamente se va efectuando la suma, de esta manera, si un niño tiene un buen manejo del ábaco, cuando el profesor ha terminado de dictar una suma, el niño habrá ejecutado la operación.

Ejemplo: consideremos la suma  $789 + 567 + 875$  y veamos cómo sumar  $789 + 567$ . En el primer ábaco se registró 789. ¿Qué se hizo en el ábaco de la derecha?

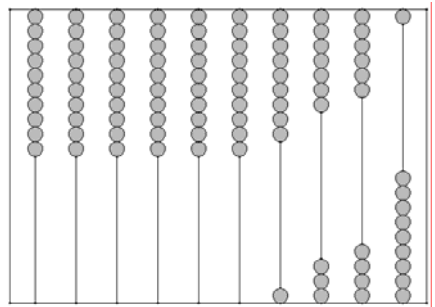


Como se observa, se agregó una unidad de millar. Dado que sólo había que agregar cinco centenas, ¿cuántas centenas necesitamos quitar?, ¿por qué? ¿qué cantidad se obtendrá?

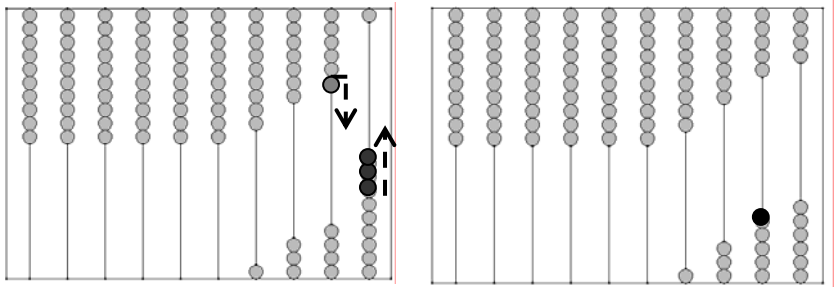


Para agregar las seis decenas, ahora agregamos una centena, ¿cuántas decenas tenemos que quitar?, ¿qué cantidad se obtendrá?

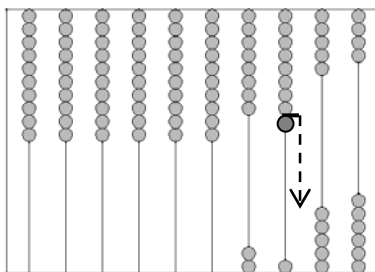
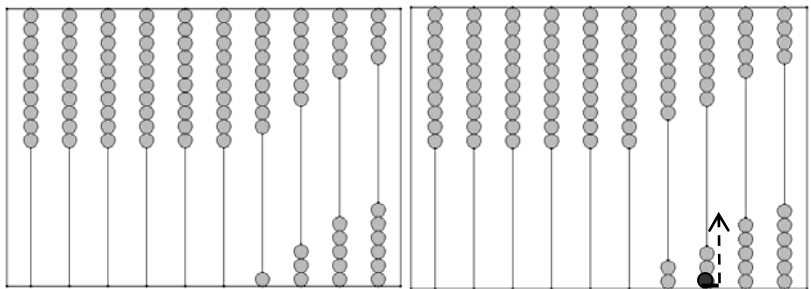
¡Claro cuatro decenas!



De acuerdo al procedimiento anterior, ¿cómo podemos proceder para agregar las 7 unidades?, los siguientes ábacos muestran cómo hacerlo.



El resultado de la suma parcial es 1356. A ésta tenemos que agregar 875. Redacte el procedimiento para realizar la suma. En los ábacos que siguen se indica como agregar las 8 centenas.







Le sugerimos que ahora realice la suma  $789 + 567$  mediante el siguiente algoritmo:

- Registre primero el número 789
- agregue 567, pero primero agregue las 7 unidades,
- después agregue las 6 decenas y
- finalmente las 5 centenas.

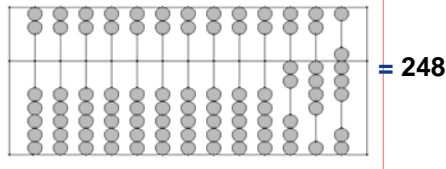
Analice los dos procedimientos, ¿qué procedimiento considera que los niños comprenderán mejor para efectuar la suma?

Notemos que al utilizar el ábaco y resolver una suma mediante cualquiera de los algoritmos anteriores, nunca tendremos necesidad de hacer cuentas como:  $7 + 6 = 13$ ; luego sumar a este resultado 8 para obtener 21. Para operar con los ábacos basta con dominar sumas cuyo resultado sea menor a diez o diez, así como las diferencias de 10 menos un dígito cualquiera.

Los procedimientos para sumar en el ábaco de cuentas externas son similares a los descritos para el ábaco de 10 cuentas, Le invitamos a tomar ese ábaco y resolver la suma:

$$789 + 567 + 875$$

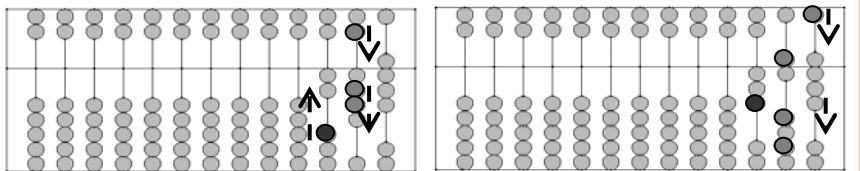
Retomemos la situación a partir de la cual iniciamos la exposición que nos permitió efectuar sumas con el ábaco de 10 cuentas. Consideremos ahora el **ábaco chino**, el cual registra 124 de la primera semana, se ha agregado 124 de la segunda y se quiere agregar otros 124, que corresponden a la tercera semana. El siguiente ábaco muestra el resultado de sumar:  $124+124=$



Para agregar 124 al resultado anterior, podemos proceder como se indica a continuación:

- Agregamos primero la centena. No implica problema alguno.
- Notemos que no podemos agregar las dos decenas, así agregamos una de las cuentas que se encuentra en parte superior de las decenas, en este caso, ¿cuántas decenas habremos agregado?, ¿cuántas decenas tendremos que quitar?, ¿por qué?

Los siguientes ábacos muestran el resultado de agregar a 248, una centena y dos decenas.

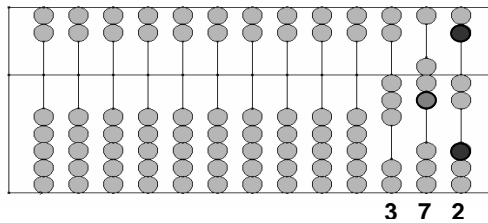
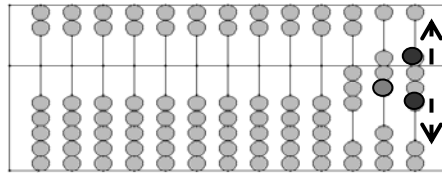
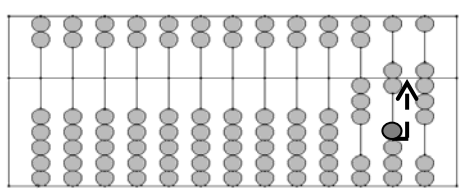


- Como en el caso de las decenas, no podemos agregar 4 unidades (sólo se tienen 2). Agregamos una de las cuentas de la parte superior de las unidades, ¿cuántas unidades habremos agregado?, ¿cuántas unidades tendremos que quitar?, ¿por qué?
- ¿Cuántas cuentas tenemos ahora en la parte superior de la columna de las unidades?, si tenemos dos cuentas en la parte superior de cualquier columna del ábaco, estas cuentas ¿por cuántas se deben cambiar?, ¿dónde debe estar ubicada esa cuenta?

El resultado de esta operación será 372.

El último paso, es decir, agregar 4 unidades, también lo podemos realizar de otra manera:

Agregamos una decena, esto es, una de las cuentas que se hallan en el lugar de las decenas pero de la parte inferior del ábaco, ¿cuántas unidades habremos agregado?, entonces, ¿cuántas cuentas de las unidades tendremos que quitar?, ¿por qué? Los siguientes ábacos ilustran el procedimiento señalado.



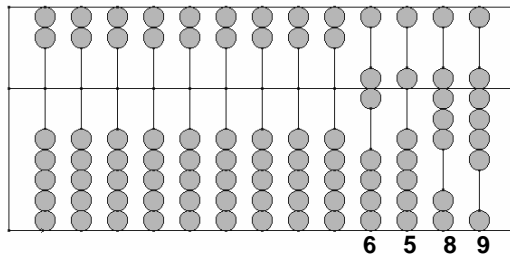
Este procedimiento abrevia un tanto aquel en el cual se agrega una cuenta que vale cinco unidades, ya que después es necesario cambiar las dos cuentas que valen cinco por una cuenta que vale 10.

Para el trabajo con los niños es conveniente sugerirles el procedimiento en el que se agrega una decena y después se quitan (restan) la unidades que sobran.

Como se mostrará en el ejemplo siguiente, es un procedimiento similar el que se utiliza para agregar las 4 unidades, el cual nos permite abreviar "pasos" cuando se trata de sumar cantidades "grandes".

Sumemos: **6589 + 7845 + 9987**

Primero registremos 6589, como se muestra a continuación:



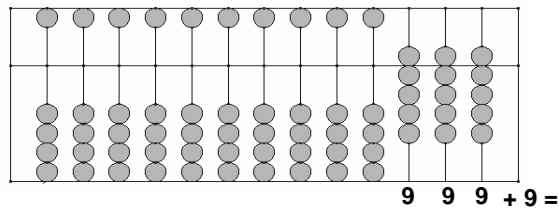
Analicemos las siguientes indicaciones y en el ábaco sumemos 7845.

- Empecemos por las siete unidades de millar. Agreguemos una decena de millar: y quitemos 3 unidades de millar, ¿por qué? Observemos que sólo tenemos una cuenta que vale 5 unidades de millar, ¿qué tenemos que hacer para quitar las tres unidades de millar?
- Agreguemos ahora las 8 centenas: coloquemos una unidad de millar, ¿Cuántas centenas habremos colocado en el ábaco con la acción anterior?, ¿Cuántas centenas son las que teníamos que agregar? y, ¿Cuántas centenas tendremos que quitar?



Utilicemos ahora el **Ábaco Japonés**.

En este ábaco se presentan situaciones de suma que no es posible realizar si se quiere empezar sumando las unidades y después las decenas, luego las centenas y así sucesivamente, por ejemplo, sumemos **999 + 9**.

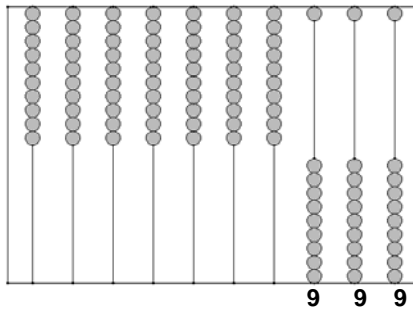


¿Qué tendremos que hacer para agregar las 9 unidades? Es imposible hacerlo utilizando el algoritmo que conocemos, es decir, sumar  $9 + 9$ , escribir el 8 y cambiar las 10 unidades por una decena, no tenemos decenas para agregar, ni tampoco centenas. Es necesario tener en mente otras relaciones; una unidad de millar es equivalente a 10 centenas, a 100 decenas y a 1000 unidades.

Entonces una manera de realizar la suma es: mentalmente realizar la operación  $1000 - 9$  y representar en el ábaco el resultado.



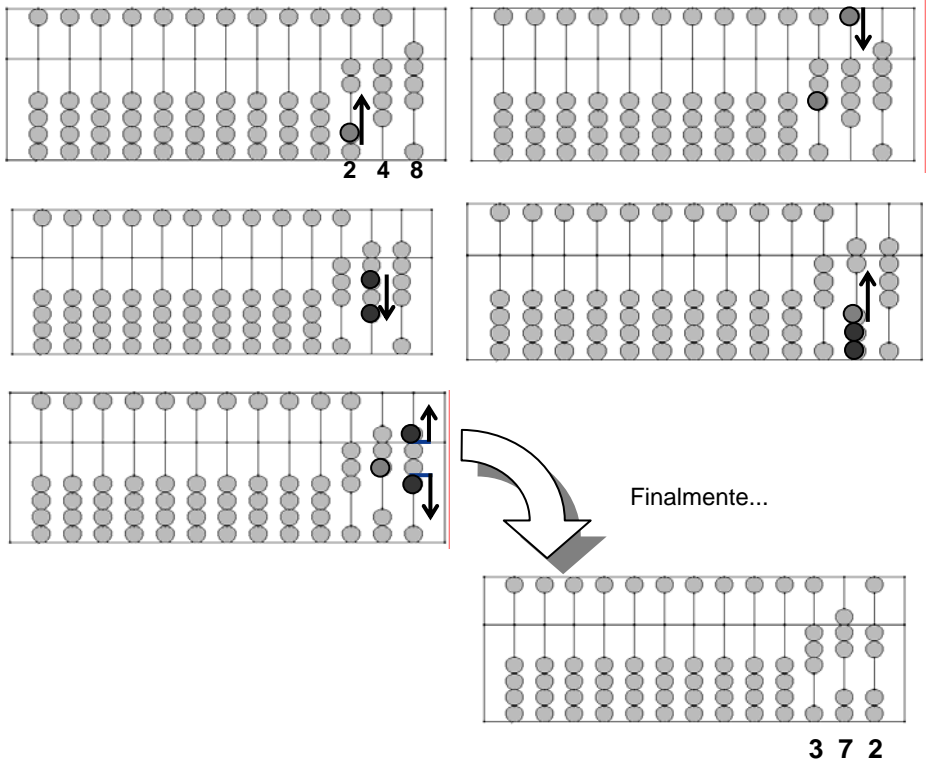
En el **ábaco chino**, en el de **diez cuentas** o en el de **cuentas externas**, la operación se puede realizar si consideramos las relaciones entre las cuentas de dos columnas que son adyacentes. Para ilustrar, veamos el caso del ábaco de 10 cuentas. Representemos 999:



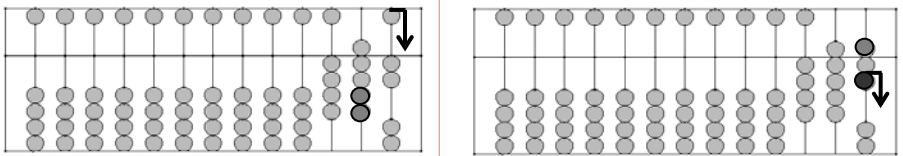
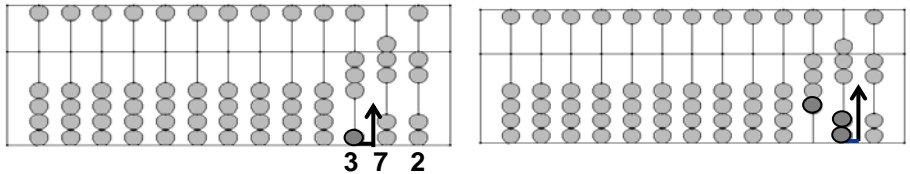
En esta situación podemos agregar la cuenta de las unidades y después de hacer los cambios que son necesarios obtendremos como resultado 1000. En este sentido, si quien utiliza el ábaco ha profundizado en las relaciones entre las cuentas de distintas columnas también, como con el ábaco japonés, podrá resolver la operación mentalmente y colocar una cuenta de las unidades de millar y quitar las 999. Las ideas anteriores no pretenden desalentar el uso del ábaco japonés, simplemente quieren mostrar algunas de las particularidades que implica su uso.

La forma de operar en el ábaco japonés es similar al segundo de los procedimientos que describimos para el caso del ábaco chino.

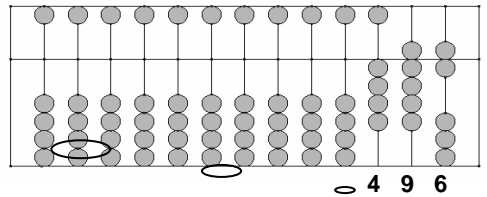
Los siguientes ábacos muestran cómo, a partir de 248, se agregan los 124 correspondientes a la tercera y cuarta semanas. El procedimiento se ilustra paso a paso. Recordemos que se inicia agregando las centenas, después las decenas y finalmente las unidades.



A continuación mostraremos como agregar a 372 los 124 correspondientes a la cuarta semana.



El resultado es:



Si operamos de manera similar como se ha descrito anteriormente, encontraremos los siguientes resultados:

Quinta semana 620, sexta semana 744, octava semana 868, novena semana 992, décima semana 1116, undécima semana 1240, sucesivamente. Así en la semana 34 habrá ahorrado 4216 pesos.

Terminaremos este apartado proponiéndole una situación para que efectúe algunas sumas:

Analice la siguiente figura. Es un cuadrado mágico.

192	24	144
72	120	168
96	216	48

Observe que si suma horizontalmente, verticalmente o en las diagonales mayores, en cualquier caso el resultado es 360.

Ahora sume 789 a cada número del cuadrado mágico. En la figura de abajo 981 es resultado de sumar  $192 + 789$ . De manera análoga escriba en el lugar correspondiente el resultado de sumar 789 a cada número del cuadrado.

981		

Utilice sus ábacos y compruebe que también se obtiene un cuadrado mágico.

Con el nuevo cuadrado proponga otro número y vuelva a repetir las indicaciones dadas anteriormente y compruebe que vuelve a obtener un nuevo cuadrado mágico.

## ALGORITMOS PARA RESTAR CON EL ÁBACO

---

Las ideas expuestas en el apartado correspondiente a los algoritmos para sumar serán de utilidad para resolver las situaciones que se plantearán en este apartado; así mismo, permitirán establecer distintos algoritmos para restar.

Existen diferentes tipos de problemas que se pueden resolver mediante la resta. A continuación se presentan algunos de ellos:

1. Juan tiene algunos dulces; dio a su mamá 13 dulces. Juan tiene ahora 27 dulces, ¿cuántos dulces tenía Juan antes de que diera a su mamá los 13 dulces?
2. Juan tiene 14 dulces, si le quitan 14 dulces tendrá la cantidad de dulces que tiene su amiga, ¿cuántos dulces tiene su amiga?
3. Juan tiene 14 dulces, su amiga tiene 27 dulces, ¿cuántos dulces necesita dar su amiga para tener la misma cantidad de dulces que Juan?
4. Juan tiene 14 dulces, su amiga tiene 13 dulces menos que Juan, ¿cuántos tiene su amiga?

Al igual que en la suma, hay algunos problemas que permiten establecer una relación directa entre acciones concretas (tomar la cantidad de dulces que se dice primero, después quitar la segunda cantidad y finalmente contar el total de dulces) que dan solución al problema y las acciones que se ejecutan en el ábaco (se representa en el ábaco la primera cantidad, se quita la segunda y se lee la cantidad que dio como resultado).

**¿Cuál de los problemas arriba anotados  
cumple con la condición anterior?  
¡Discutámoslo con otros docentes!**

Antes de dar inicio a la exposición, queremos insistir en la necesidad de desarrollar la habilidad de estimar; permitirá que los alumnos tengan un parámetro para comparar con el resultado que obtendrán mediante el uso del ábaco. Por ejemplo, es común que ante el problema: *tengo 100 pesos, el chocolate que voy a comprar vale \$9, ¿cuánto me darán de cambio?*, al hacer la resta  $100-9$ , es frecuente que los alumnos obtengan como resultado 109. En este caso, si al menos anticiparan que el resultado debe ser menor a 100 (estamos quitando una cantidad a 100), entonces ante el resultado obtenido, los niños se darán cuenta que no puede ser esa cantidad (109) y comprenderán que su procedimiento no es correcto.

Es importante señalar que para estimar el resultado de una resta lo podemos hacer mediante diversos procedimientos. A continuación señalaremos algunos. Cabe resaltar que no se trata de que nuestros alumnos aprendan estas estrategias. En general, los propios alumnos las generan; lo importante es que en cada problema que se planteé se pida que hagan una estimación del resultado.

Para ilustrar, veamos algunos procedimientos para estimar y aún para dar con el resultado exacto. Consideremos que una situación nos lleva a resolver la resta:

$$6,503 - 3,647$$

- a) Si redondeamos el minuendo a 6,000 y el sustraendo a 3,000, el resultado es aproximadamente 3,000.
- b) Si el minuendo lo redondeamos a 6,500 (¿por qué?) y el sustraendo a 3500, (¿por qué?) el resultado es 3000.
- c) Si redondeamos 6,503 a 6,500 y 647 a 600, entonces podemos restar esta cantidad a 1,000. Se obtiene 400, por lo tanto, el resultado es aproximadamente 2,900, ¿por qué?
- d) Si redondeamos 6,503 a 6,500 y 647 a 650, entonces podemos restar esta cantidad a 1,000. Se obtiene 350, por lo tanto, el resultado es aproximadamente 2,850, ¿por qué?



- e) De acuerdo a la estimación realizada en el punto anterior, redondeamos 647 a 650 (aumentamos 3 unidades); al restarlo a 100 obtuvimos 350. Si a este número le aumentamos 3, podemos decir que el resultado es aproximadamente 2,853.
- f) Para realizar la estimación anterior hemos redondeado 6,503 a 6500; por lo tanto, si queremos obtener el resultado exacto, debemos aumentar a 2,853 otros 3 ¿por qué?. Así obtendremos 2856.

Insistimos, los procedimientos para estimar no son únicos; la forma de estimar depende en mucho de las cantidades involucradas. La estimación es una estrategia que nos permite decir si el resultado de una operación es razonable o no. Pero no podemos concluir que exista un mejor procedimiento para estimar que otro.

Le proponemos realizar varias estimaciones del resultado de la siguiente operación: **5,291 – 2,867** y escribir los procedimientos que siguió. Así mismo le proponemos investigar las estrategias que pueden seguir los niños para estimar restas con cantidades formadas por decenas y unidades, así como cantidades formadas por centenas, decenas y unidades.

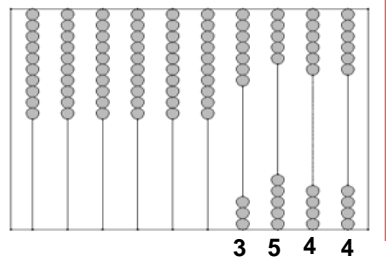
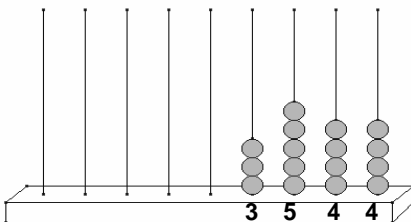
A continuación plantearemos una situación que permita establecer algoritmos para restar en nuestros ábacos. La situación es la siguiente:

La mamá de Luis tiene en su caja de ahorro 3,789 pesos. Si cada día toma 245 pesos para la comida, ¿para cuántos días le alcanzará el dinero que tiene?, la última vez que tome dinero de su caja, ¿cuánto dinero tomará?

Veamos cómo resolver el problema en los diferentes ábacos. Representemos 3,789 en cada uno de ellos.

¿Cómo hacer para restar a 3,789, 245 que corresponden a la primera semana? Le sugerimos iniciar quitando las cuentas que representan las centenas, después, las decenas y finalmente las unidades. ¿Tuvo algún problema?

Efectuar las acciones anteriores en el **ábaco de cuentas externas** o en el **ábaco de 10 cuentas** seguramente no le ocasionó problema alguno y obtuvo el resultado que se ilustra enseguida:





- Cambiamos (subimos) la cuenta que se encuentra en la parte superior de las decenas por las cinco cuentas (cada una vale una decena) que se encuentran en la parte inferior de esta misma columna.
- Quitamos una de las cuentas anteriores, es decir, la decena que faltaba.
- Quitamos las cinco unidades.

**El resultado es 3,544**

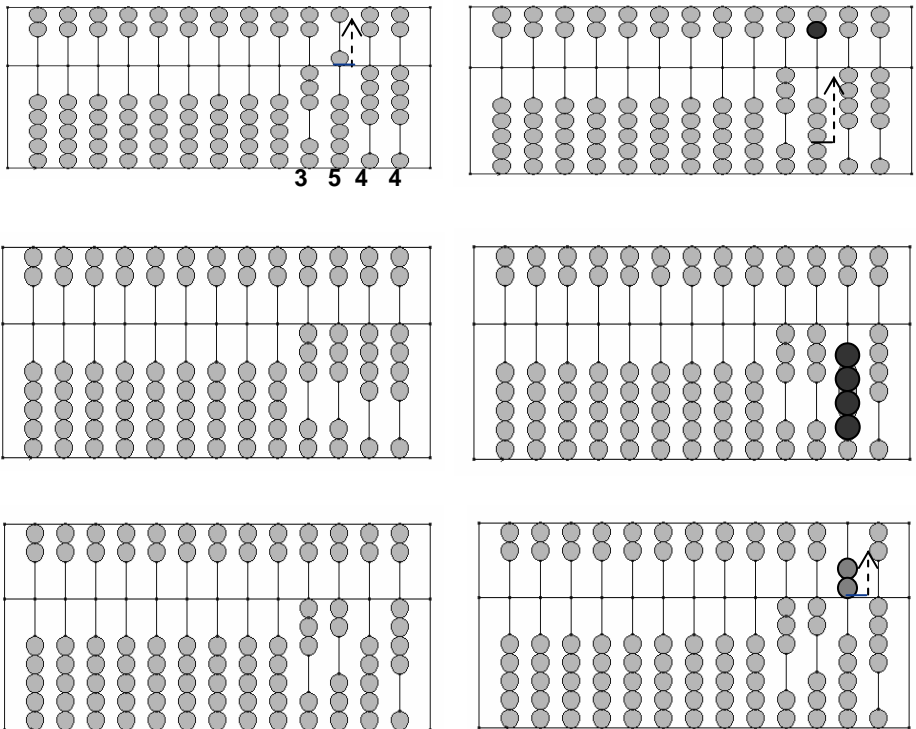
## Procedimiento 2

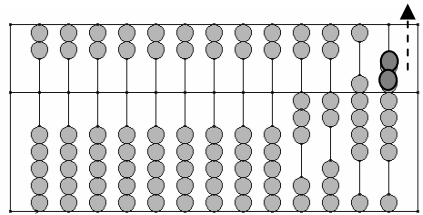
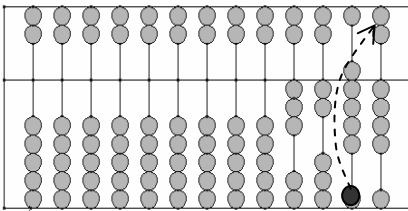
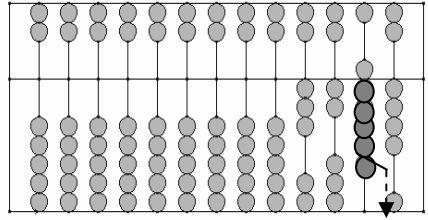
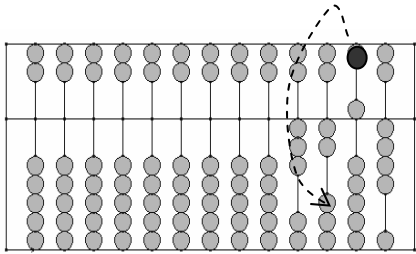
- Quitamos la cuenta de las decenas que se encuentra en la parte superior del ábaco, ¿cuántas decenas vale?
- Agreguemos una decena (de las cuentas que se encuentran en la parte inferior del ábaco), ¿por qué tenemos que agregar esta decena?
- Quitamos las cinco unidades.

**Al igual que en el caso anterior el resultado es 3,544**

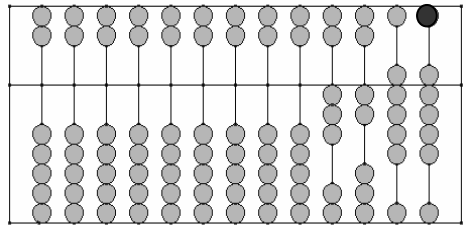
**¿Qué procedimiento le parece más sencillo?  
¿Cuál de los anteriores procedimientos  
considera usted que los niños pueden descubrir?**

En la siguiente secuencia de ábacos ilustramos la forma de restar 245 a 3,544 que corresponden a la segunda semana.





El resultado de la  
operación es:



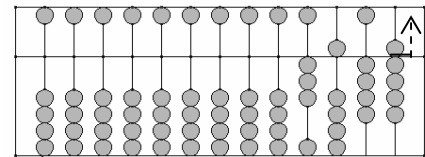
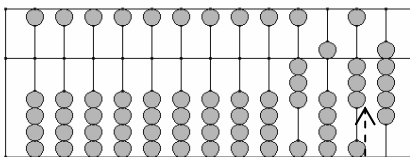
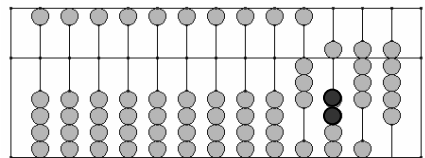
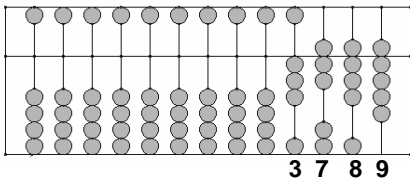
**3 2 9 9**

Aparentemente el procedimiento es muy laborioso. En la práctica, muchos de los pasos anteriores se hacen mentalmente y sólo se concreta el paso que permite efectuar el cálculo que necesitamos.

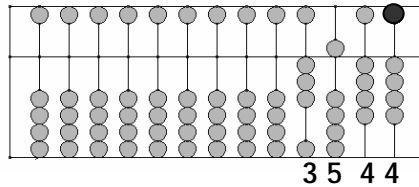
Le sugerimos continuar restando 245 a los resultados que vaya obteniendo, hasta saber para cuántos días le alcanzará el dinero a la mamá de Luis y cuánto dinero tomará el último día.

### Ábaco Japonés

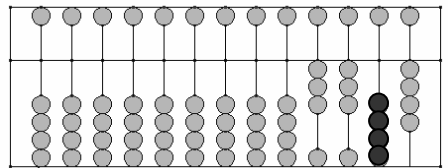
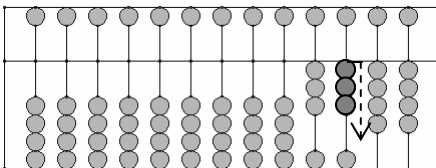
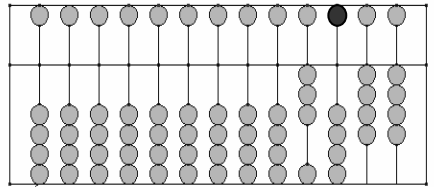
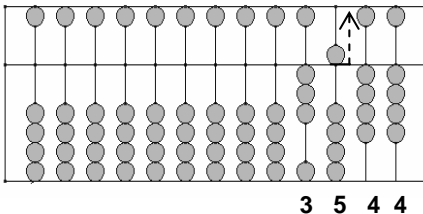
La resta en el ábaco japonés se puede realizar de manera semejante al segundo procedimiento indicado para el ábaco chino, es decir, se inicia restando por las cifras de mayor valor relativo, en este caso por las centenas. Analice la secuencia de ábacos que se muestra a continuación y redacte el procedimiento que se ilustra para realizar la resta **3,789 – 245**.



El resultado es:



En la siguiente secuencia se muestra cómo restar a 3,544 otros 245 que corresponden a la segunda semana. El primer ábaco muestra el número 3,544. Analicemos por qué el procedimiento se simplifica.



Como se observa en el último ábaco, no podemos quitar las cinco cuentas; no tenemos cuentas de 10 (decenas). Es necesario quitar una cuenta de cien (centenas) y mentalmente realizamos la operación  $100 - 5$ . Esta es una de las diferencias con los demás ábacos, en los cuales siempre es posible "concretar" con las cuentas del ábaco el minuendo.

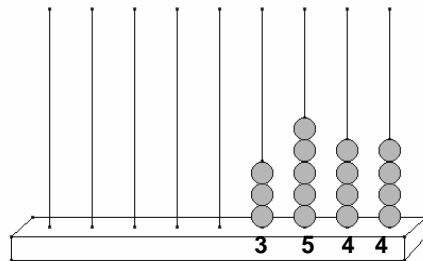


En consecuencia, es necesario operar sobre esta cantidad. En el ábaco chino hemos mostrado cómo se “concretan” las acciones para realizar la resta  $100 - 5$ .

Le invitamos a utilizar su ábaco y resolver la situación, es decir restar 245 a la diferencia que se obtiene a partir de la resta  $3,789 - 245$ ; pero ahora empiece por las unidades, después las decenas y luego las centenas.

### Ábaco de Cuentas Externas

Recordemos que en este ábaco habíamos restado 245 a 3,789 y obtuvimos como resultado 3,544, como se muestra en el siguiente ábaco:



Al resultado anterior restemos otros 245, que corresponden a la segunda semana. Realicemos el procedimiento empezando por la izquierda, en este caso, por las centenas.

### Instrucciones:

- Restemos dos centenas.
- Restemos las cuatro decenas.
- Como no podemos restar cinco unidades, cambiemos una centena por diez decenas; después quitemos una decena. Esta acción implica quitar 10 unidades, ¿por qué?
- Agreguemos cinco unidades.  
El resultado que obtendremos es: 3,299. Restar a esta cantidad otros 245 de la tercera semana es sencillo, obtendremos 3,054.

Restemos a **3,054** otros **245** de la cuarta semana.

### Instrucciones:

- Dado que no tenemos centenas, cambiemos una unidad de millar por 10 centenas y quitemos 2 centenas.
- Quitemos 4 decenas.
- Como sólo tenemos 4 unidades no podemos quitar las 5 que se necesitan; cambiemos la decena que nos quedó por diez unidades y a éstas quitemos la 5 y coloquemos en la columna de las unidades las cinco unidades sobrantes.

**El resultado es 2,809**

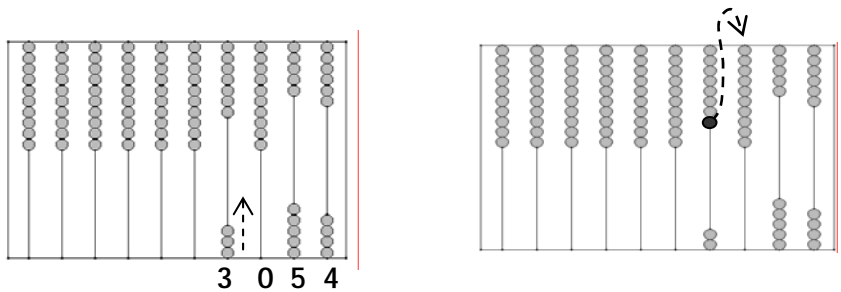
El procedimiento que se ha indicado permite restar cualquiera de las dos cantidades: una es el minuendo y la otra el sustraendo. Le invitamos a realizar las operaciones anteriores, pero empezando por la

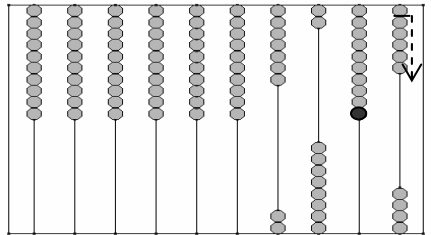
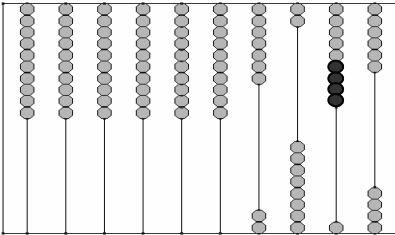
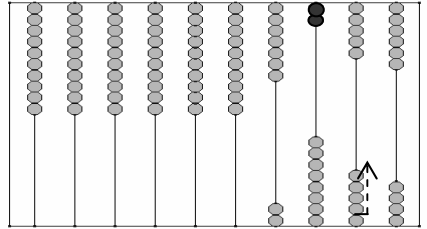
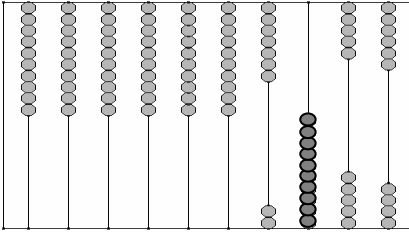
derecha, es decir, restemos primero las unidades, luego las decenas y por último las centenas.

- ¿Qué algoritmo le parece más adecuado?
- ¿El algoritmo en el cual se empieza a restar por la izquierda o aquel que empieza por la derecha?,
- ¿Cuál de los dos algoritmos le será más sencillo descubrir a los alumnos?
- ¡Discutámoslo con otros docentes!

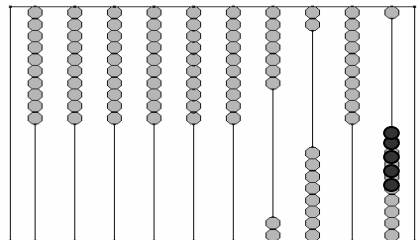
### Ábaco de Diez Cuentas

Los procedimientos para restar en este ábaco son similares a los indicados para el ábaco de cuentas externas. Para ilustrar la siguiente secuencia de ábacos, se muestra cómo restar a 3,054 otros 245, que corresponden a la cuarta semana. Empezaremos por las unidades de millar.





Finalmente...



2 8 0 9

Le sugerimos resolver la misma resta, pero iniciando la operación por las unidades, después las decenas y por último las centenas. Comente con otros docentes acerca de qué procedimiento es relativamente más sencillo para usted y para los alumnos.

Para finalizar, haremos algunos comentarios respecto al procedimiento para restar. Como hemos visto, es más sencillo empezar a operar por la izquierda, ya que es como escribimos las cantidades, tanto con lápiz y papel como en el ábaco. Es posible efectuar restas empezando por la derecha; sin embargo, se requiere de una buena memoria, ya que al restar, debemos retener el minuendo leído de las unidades al dígito de mayor valor relativo.

Un aspecto importante de hacer notar es que mediante el uso del ábaco podemos evitar realizar restas como  $11 - 4$ ,  $15 - 7$ . Veamos un ejemplo en el que se muestra lo anterior: Restemos  $213 - 79$ . Le invitamos a que siga las siguientes instrucciones. Primero utilice el ábaco de 10 cuentas, después el ábaco chino y finalmente el ábaco japonés.

### Instrucciones:

- Representemos 213.
- Dado que no podemos quitar 7 decenas, quitamos una centena y ponemos 3 decenas. Notemos que mentalmente no decimos 11 menos 7; decimos: 10 menos 7 (en realidad deberíamos decir 10 decenas menos 7 decenas). Tenemos

que aumentar 3 decenas porque hemos quitado 10 decenas.

- No podemos quitar 9 unidades. Quitamos una decena y ponemos 1 unidad. Mentalmente decimos: 10 menos 9. Agregamos 1 unidad porque al quitar una decena, hemos quitado 10 unidades.

Hay ocasiones en que en los ábacos chino y japonés sólo necesitamos efectuar restas como  $5 - 2$ , o  $5 - 4$ . Para ilustrar hagamos la siguiente resta:

$$167 - 34$$

### Instrucciones:

- Representamos 167.
- Sólo tenemos una decena en la parte inferior del ábaco. Quitamos la cuenta que se encuentra en la parte superior del ábaco (columna de las decenas) y aumentamos dos decenas. Mentalmente decimos 5 menos 3. Aumentamos dos decenas porque al quitar la cuenta de la parte superior, hemos quitado 5 decenas.
- No podemos quitar 4 decenas ya que sólo hay tres en la parte inferior. Quitamos la cuenta de las unidades, que se encuentra en la parte superior del ábaco y, aumentamos una unidad.

Los procedimientos descritos muestran que en el caso del ábaco de cuentas externas, el de 10 cuentas y el chino, necesitamos memorizar diferencias de restas donde el minuendo es 10 y el sustraendo un dígito cualquiera; así mismo, necesitamos memorizar diferencias de restas en las que el minuendo es 5 y el sustraendo es 4, 3, 2, o 1.

Terminaremos este apartado proponiéndole algunas situaciones para efectuar algunas restas:

Consideremos cuatro dígitos distintos, por ejemplo 2, 7, 4 y 9. Siga las siguientes instrucciones:

- Con los cuatro dígitos formemos el número mayor (en este caso 9,742).
- Formemos el número menor (el número es 2,479).
- Al mayor restemos el número menor:  $(9,742 - 2,479)$ .
- Con los dígitos que obtengamos al hacer la resta (7,263), de nueva cuenta formemos el número mayor y el menor. Restemos al número mayor el número menor.
- Con la diferencia obtenida repitamos los pasos anteriores.

Si seguimos las indicaciones correctamente, observaremos que al resolver un cierto número de estas restas, llegaremos a un mismo resultado.

Elija otros cuatro dígitos distintos y siga las instrucciones anteriores. Utilice su ábaco para hacer las restas. Conteste las siguientes preguntas:

**¿Cuál es el número al que siempre se llegó?  
¿Cuál es el número más grande  
que restamos?**

Realice la actividad anterior, pero ahora elija 3 dígitos distintos.

Realice la actividad anterior, pero ahora elija 5 dígitos distintos.



## ALGORITMOS PARA MULTIPLICAR CON EL ÁBACO

---

**H**emos insistido en la necesidad de que el aprendizaje de los algoritmos en las operaciones esté ligado a la resolución de problemas. Como hemos señalado, la resolución de problemas permite que los alumnos den sentido a lo que aprenden. Así resolver operaciones implicará dar respuesta a un problema y no solamente darle gusto al profesor, a pesar de que a los profesores si nos de gusto que lo hagan bien.

En el contexto anterior, cabe la pregunta, ¿qué problemas son los que, en un inicio, nos permitirán abordar la multiplicación? Veamos los siguientes tipos de problemas:

1. Juan tiene 5 bultos de naranjas, si cada bulto tiene 16 naranjas, ¿cuántas naranjas tiene Juan en total?
2. El salón de Juan tiene 8 filas de sillas. Si en cada fila hay 7 de sillas, ¿cuántas sillas hay en salón de Juan?
3. Un boleto de cine cuesta \$35. Si entraron 79 personas, ¿cuánto dinero se juntó?
4. En el grupo de danza de Juan hay 15 niñas y 9 niños, ¿cuántas parejas de baile distintas se pueden formar?

5. La cancha de voleibol de la escuela de Juan tiene forma de rectángulo, mide 12 metros de largo y 5 metros de ancho, ¿cuántos metros cuadrados mide la cancha?

Un análisis de los problemas anteriores, no permite concluir que todos pueden resolverse mediante una multiplicación, sin embargo, esta operación no es una herramienta que los alumnos usen de manera natural. Por otro lado la suma es una forma “natural” para que los alumnos resuelvan los tres primeros problemas.

El cuarto y quinto problemas no tienen, —al menos para un niño sin experiencia en este tipo de problemas,— relación con la multiplicación; seguramente para resolverlo utilizará algún esquema o diagrama que le permita cuantificar el total de parejas o el total de metros cuadrados que mide la cancha.

Para que los niños utilicen la multiplicación como herramienta para resolver problemas como los anteriores, necesitamos diseñar situaciones para tal propósito. A continuación exponemos una situación didáctica que permite a los alumnos multiplicar una cantidad cualquiera por un dígito.

Consideremos 123 pesos representados como: un billete de 100, dos monedas de 10 y 3 pesos sueltos. Si por cada billete o moneda que representa la cantidad anterior, nos dan 4 billetes o monedas de la misma denominación, ¿cuánto dinero nos darán en total?

Para trabajar con niños ciegos se recomienda utilizar dos ábacos, uno para representar los 123 pesos y el segundo para registrar el resultado.

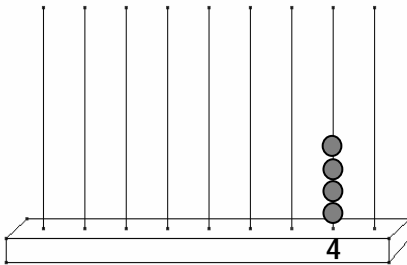
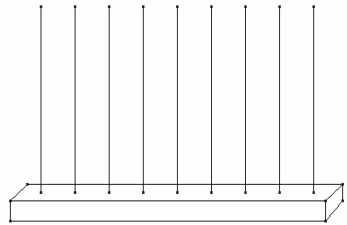
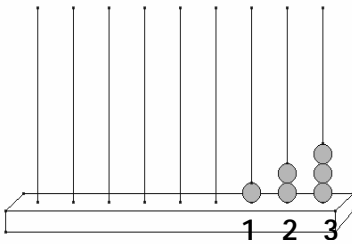
### **Ábaco de Cuentas Externas**

Es conveniente que los alumnos tengan clara la consigna de la situación, esto es:

- Por cada billete de 100 pesos nos darán 4 billetes de ese mismo valor, es decir 4 billetes de cien pesos.
- Por cada moneda de 10 pesos nos darán 4 de esa misma denominación. Dado que tenemos 2 nos darán 8 monedas de 10 pesos.
- Por cada moneda de un peso nos darán 4. Dado que tenemos 3 nos darán 12 monedas de un peso.

Para resolver la operación en el ábaco, se puede proceder de la siguiente manera:

Representamos en uno de los ábacos la cantidad, en este caso 123. Este ábaco permitirá a los niños controlar los billetes o monedas que se van considerando. Veamos:



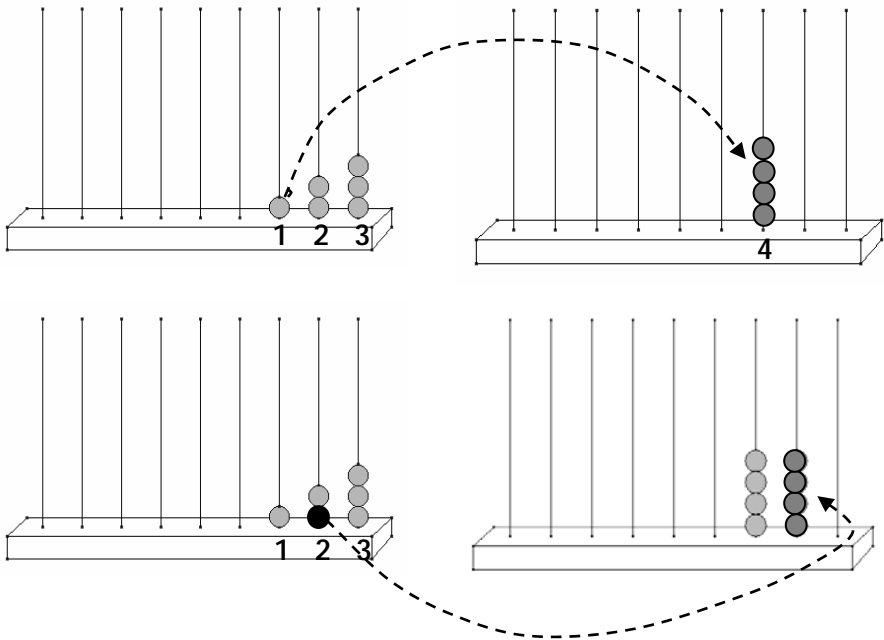
Iniciemos el procedimiento por las cuentas que representan los billetes de cien (centenas). Como sólo tenemos una centena, entonces tendremos que poner 4 centenas en el ábaco vacío.

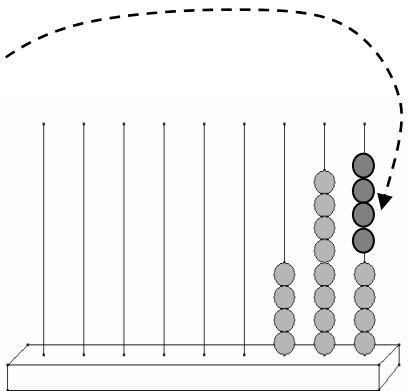
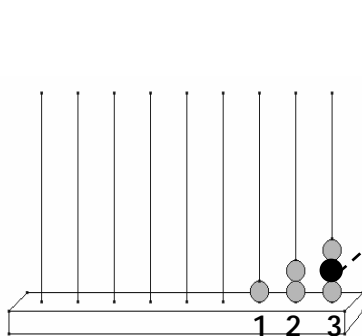
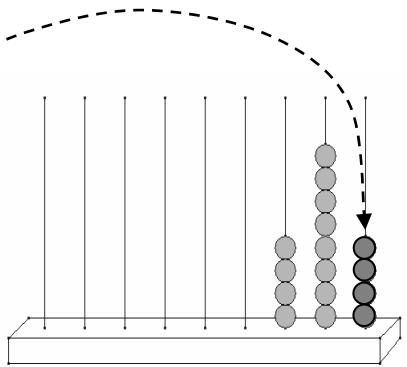
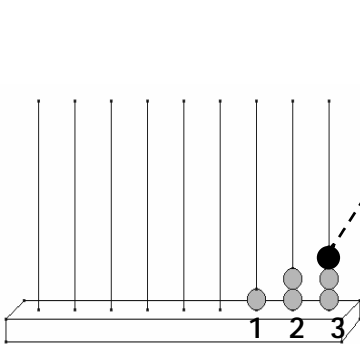
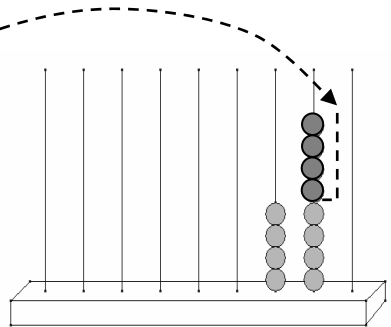
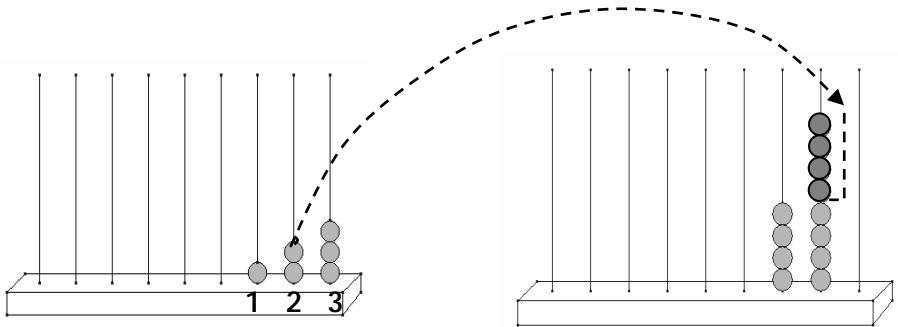
¿Cuántas cuentas de 10 pesos tendremos que colocar en el ábaco vacío si tenemos 2 monedas de 10 pesos?

¿Cuántas cuentas de un peso tendremos que colocar en el ábaco si se tienen 3 monedas de un peso?

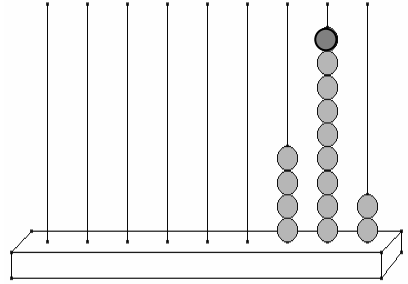
En el caso de las monedas de un peso tendremos que colocar 12; por lo que será necesario cambiar 10 monedas de un peso por una de diez.

En los siguientes ábacos ilustraremos paso a paso el procedimiento indicado anteriormente.

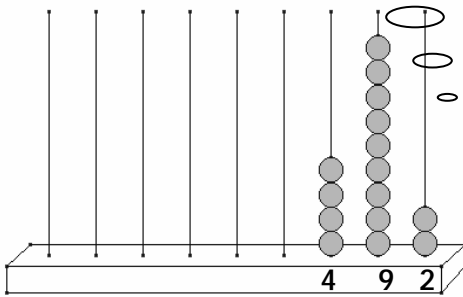




Notemos que faltan 2 cuentas para tener 10; mentalmente o de manera concreta podemos agregar las 2 cuentas, hacer el cambio, es decir, sacar las 10 cuentas y poner una cuenta en el lugar de las monedas de 10 pesos (decena). Finalmente colocamos en el lugar de las monedas de un peso las 2 cuentas que faltan, como se muestra en el ábaco.



Finalmente...



El resultado de multiplicar  $123 \times 4$  es **492**. Observemos que mediante este procedimiento podemos lograr desde un inicio que los niños multipliquen cantidades relativamente grandes, aunque debemos considerar el rango de números que los niños manejan.

Por otra parte, para simplificar los cálculos los alumnos necesitan adquirir cierta destreza para determinar el número de decenas, centenas, etc., que en un momento dado se necesitan cambiar. Por ejemplo, si se juntan 25 decenas debemos cambiar 20 decenas por 2 centenas y sobran 5 decenas; si tenemos 48 unidades debemos cambiar 40 unidades por 4 decenas y sobran 8 unidades. Un alumno que maneje relaciones como las anteriores, en el caso de la multiplicación  $4 \times 3$ , simplemente registrarán en el ábaco una decena y dos unidades. En este sentido, la operación se realiza en un menor tiempo.

El procedimiento descrito para multiplicar  $123 \times 4$ , se inició por las centenas, luego las decenas y en último lugar las unidades. Le proponemos que usted resuelva la misma situación, pero ahora iniciemos la multiplicación operando las unidades, después las decenas y finalmente las centenas. La consigna es la misma:

- Por cada billete de 100 pesos nos darán 4 billetes de ese mismo valor.
- Por cada moneda de 10 pesos nos darán 4 de esa misma denominación.
- Por cada 4 monedas de un peso nos darán 4 de ese mismo tipo.



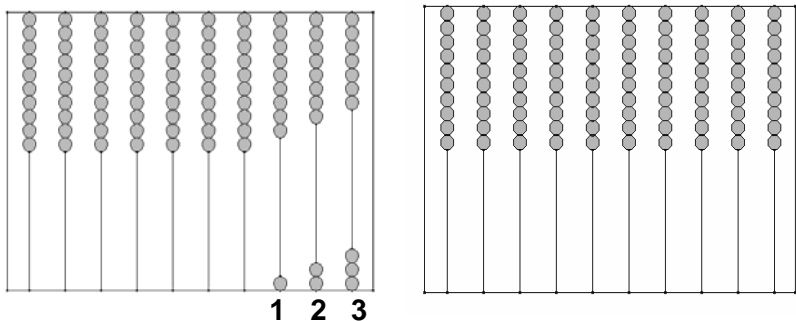
## Ábaco de Diez Cuentas

Como en el caso del **ábaco de cuentas externas**, para poder trabajar con niños ciegos, conviene utilizar dos ábacos, uno para representar los 123 pesos y otro para anotar el resultado.

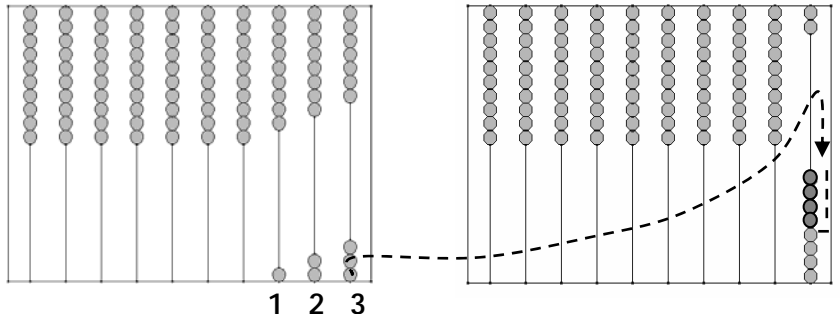
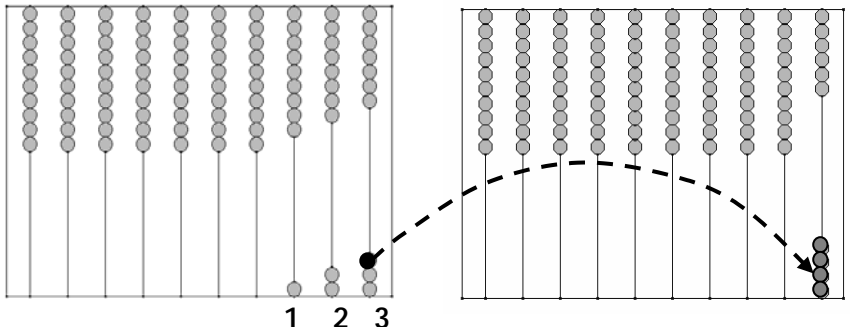
Iniciaremos la multiplicación por las unidades, después las decenas y por último las centenas.

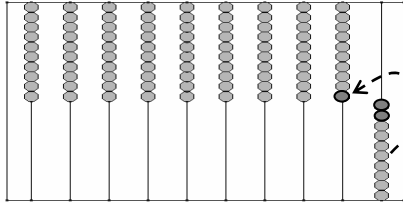
Recordemos la situación: consideremos 123 pesos (un billete de 100, dos monedas de 10 y 3 pesos sueltos). Si por cada billete o moneda que representa la cantidad anterior nos dan 4 billetes o monedas de la misma denominación, ¿cuánto dinero nos darán en total?

Representemos 123 en el primer ábaco.

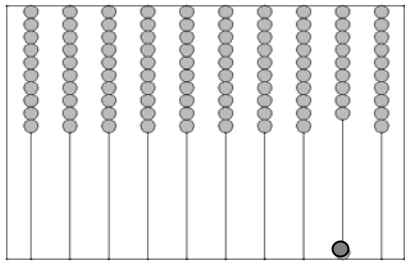


En los ábacos siguientes se muestra cómo proceder para agregar las unidades y el cambio que se deriva de ello.

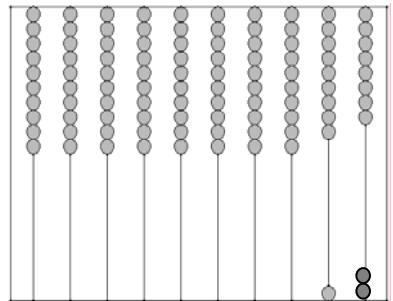




Para agregar las 4 monedas de un peso que faltan podemos agregar las dos cuentas; se tendrán 10, éstas las tenemos que cambiar por una decena; significa subir las diez cuentas y bajar una de las decenas.



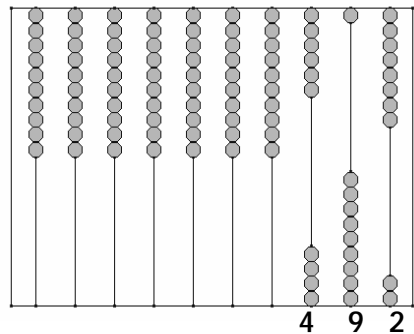
Finalmente agregamos las dos cuentas que faltan.



Otra posibilidad para agregar las dos unidades es agregar una decena y quitar ocho unidades. Le invitamos a llevar a cabo este procedimiento en su ábaco.

Si los niños ya tienen en su memoria algunos resultados (tablas) y, saben que 12 significa una de diez (una decena) y dos de uno (unidades), entonces, como hemos señalado líneas arriba, el procedimiento se abrevia: simplemente colocarán en el ábaco una decena y dos unidades.

Para terminar la operación no tendremos dificultad alguna para poner las 8 decenas (monedas de 10) y las 4 centenas (billetes de 100) correspondientes a la centena. El resultado es: **492** como se muestra en el siguiente ábaco:



Observemos que la situación de la cual se partió para realizar la multiplicación en el ábaco es adecuada para que los niños vayan aprendiendo las famosas tablas de multiplicar, así en la situación de que por cada billete o moneda que representa 168 nos den 6 billetes o

monedas de la misma denominación, ¿cuánto dinero nos darán en total?

Si suponemos que nuestros alumnos pueden realizar, en este caso, sumas de 6 en 6, podemos proponerles que digan en voz alta la cantidad de monedas o billetes que van obteniendo. Así podrán decir: “por una me dan 6, por 2 me dan 12, por 3, 18...”, y así sucesivamente”. Es en este contexto que los alumnos poco a poco irán reteniendo en su memoria estos resultados.

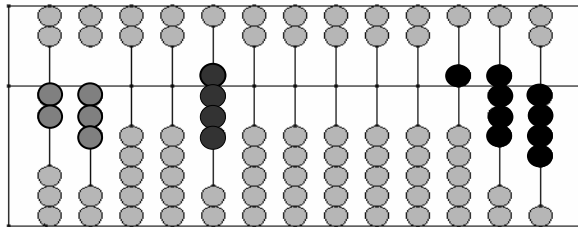
## Ábaco Chino

Para resolver con el ábaco chino la situación que hemos venido trabajando, conviene utilizar un solo ábaco. Antes de iniciar la exposición haremos algunas precisiones.

Utilizar un solo ábaco para multiplicar implica tener un excelente dominio de las propiedades del sistema de numeración decimal; así, tenemos que representar en el ábaco las tres cantidades: el multiplicador, el multiplicando y el resultado.

Lo anterior implica romper con la forma de representación que hemos utilizado: tenemos que dividir el ábaco en tres partes, —no necesariamente iguales,— En la primera (izquierda del ábaco) representamos el multiplicando, en la parte de en medio el multiplicador y en la tercera (derecha del ábaco) el resultado, como se muestra en el ábaco siguiente:

$$23 \times 8 = 184$$



Por otra parte, para multiplicar en el ábaco (cualquier ábaco) no basta con saber de memoria los productos básicos (las tablas); así en la multiplicación  $23 \times 8$ , al multiplicar  $8 \times 3 = 24$  tenemos que considerar: qué representa ese 24: ¿24 centenas?, ¿24 decenas?, ¿24 unidades?. Ahora la pregunta es: ¿en qué parte del ábaco debemos registrar esa cantidad?

Lo anterior se puede volver un tanto más complicado cuando se trata de resolver multiplicaciones que involucran cantidades mayores, por ejemplo  $234 \times 567$ . En este caso, cuando multiplicamos  $5 \times 2 = 10$  nos preguntamos: ¿10 qué? En el ábaco, ¿dónde registramos esa cantidad?, lo mismo sucede con el resultado de la multiplicación  $6 \times 3$ , ¿qué representa el 18?

Lo anterior "no sucede", cuando operamos con lápiz y papel. Nos guiamos por nuestra vista y por lo que sabemos de nuestro algoritmo; así, en el ejemplo  $234 \times 567$ , al multiplicar  $6 \times 4 = 24$  escribimos el cuatro en la columna de las decenas. La visión juega un papel preponderante para guiarnos o para guiar a los niños que aprenden el procedimiento.

En el ábaco no sabemos de inmediato dónde debemos registrar el resultado.

Las ideas anteriores sirven para alertarnos a la hora de trabajar problemas en los que la multiplicación es una herramienta para resolverlos y es de gran ayuda que podamos representar en el ábaco tanto el multiplicando, el multiplicador así como el resultado.

La situación a partir de la cual iniciamos el trabajo de la multiplicación (por cada centena, decena, o unidad, que representa la cantidad, nos dan 1, 2, 3..., o 9 centenas, decenas o unidades), nos brinda la posibilidad para que los niños comprendan las ideas anteriores. Así, mediante la reflexión que el profesor propicie, los alumnos se darán cuenta de que:

Unidades por unidades = unidades    **uxu=u**  
Unidades por decenas = decenas    **uxd=d**  
Unidades por centenas = centenas    **uxc=c**  
Unidades por unidades de millar = unidades de millar    **uxUm=Um**, etcétera.

En la siguiente tabla se anotan las relaciones anteriores y otras que conviene que los niños paulatinamente dominen:

ux u= u	dx u= d	cx u= c	Umxu =Um	
ux d= d	dx d= c	cx c= D m	Umxd =Dm	
ux c= c	dx c= Um	cx U m =C m	Umxc =Cm	
ux Um =U m	dx Um =D m	cx C m =D M	UmxU m=U M	
...	...	...	...	
...	...	...	...	



Insistimos, el dominio de estas relaciones debe derivarse de la reflexión que el profesor haga con sus alumnos a partir de la resolución de situaciones en la que tengan que resolver alguna multiplicación en que el multiplicando y el multiplicador sean una potencia de 10, es decir, 10, 100, 1000, 10000, etcétera.

Es importante señalar lo siguiente: no se trata de que los alumnos se aprendan antes las relaciones y después resuelvan multiplicaciones. La idea es que vayan aprendiendo aquellas que son necesarias para resolver las operaciones que así lo requieran.

Las relaciones  $d \times d = c$ ;  $d \times U_m = D_m$ ;  $d \times D_m = C_m$ ;..., pueden cobrar sentido si realizamos multiplicaciones como las siguientes:

$$\begin{aligned} 10 (d) \times 10 (d) &= 100 (c) \\ 10 (d) \times 100 (c) &= 1000 (U_m) \\ 10 (d) \times 1000 (U_m) &= 10000 (D_m) . . . \end{aligned}$$

A continuación plantearemos un problema que puede resolverse mediante una división, sin embargo, se ha visto que los niños utilizan la multiplicación como una forma de resolverlo. Supondremos que los alumnos tienen dominio de la mayoría de los productos básicos. La operación la resolveremos utilizando un sólo ábaco.

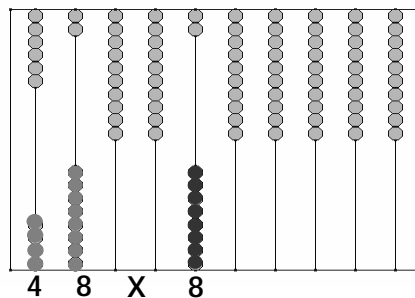
Una persona tiene 768 naranjas y desea colocarlas en bolsas en las que caben 8 naranjas, ¿cuántas bolsas necesita? y ¿cuántas naranjas le sobran?

Para iniciar la división podemos suponer que necesitamos 48 bolsas (en realidad un buen estimador no utiliza este tipo de cantidades. Seguramente 10, 50, 100, etc. son cantidades más cercanas a una estimación que por otra parte, permite simplificar los cálculos).

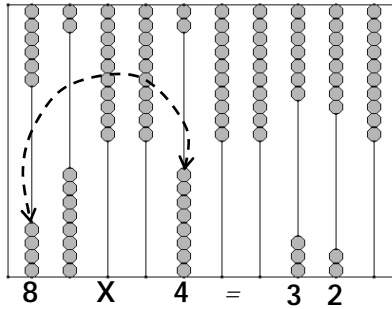
Si consideramos que hemos necesitado 48 bolsas, para saber el total de naranjas que metimos en las bolsas necesitamos multiplicar  $48 \times 8$ . Hagámoslo:

### Ábaco de Diez Cuentas

Representamos las  
dos cantidades  
(multiplicando y  
multiplicador)



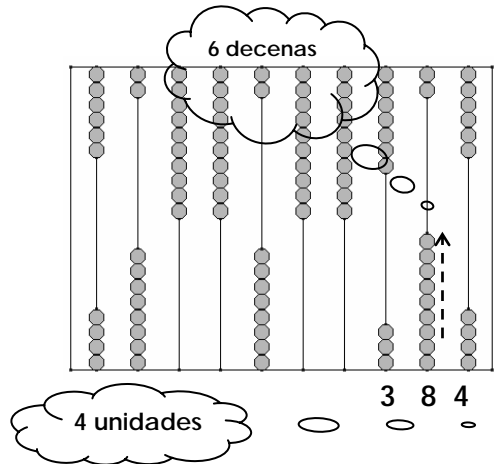
Iniciemos multiplicando primero las decenas y después las unidades.



Al multiplicar  $8 \times 4 = 32$  debemos tomar en cuenta que estamos multiplicando unidades por decenas, así que el resultado debe ser en decenas. En consecuencia, debemos registrar en la parte izquierda del ábaco 32 decenas, que equivalen a **3 centenas y 2 decenas**, como se muestra en el ábaco de la izquierda.

Ahora multiplicamos las unidades:

$8 \times 8 = 64$ , el resultado deben ser unidades, ya que  $uxu = u$ . Dado que 64 unidades es equivalente a 6 decenas y 4 unidades, registramos estas últimas cantidades en el ábaco.

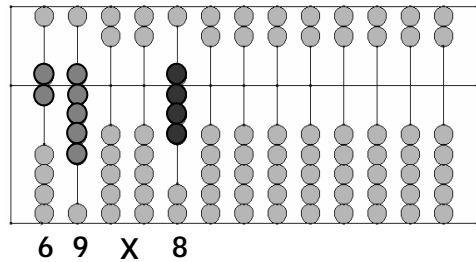


El resultado es 384. Como se tienen 768 naranjas quiere decir que todavía necesitamos más bolsas.

Supongamos que se necesitan 69 bolsas. Ahora realicemos la operación con el ábaco chino.

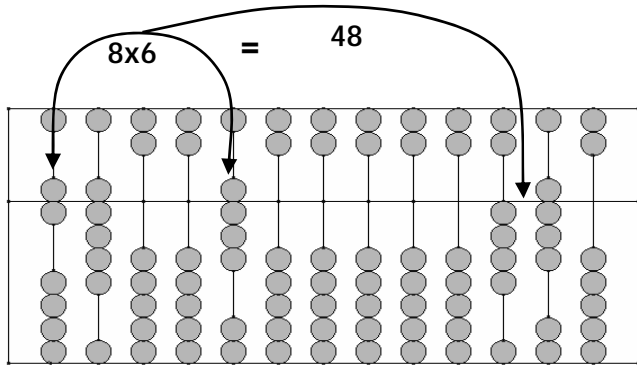
### Ábaco Chino

Representemos los números **69** y **8** respectivamente.

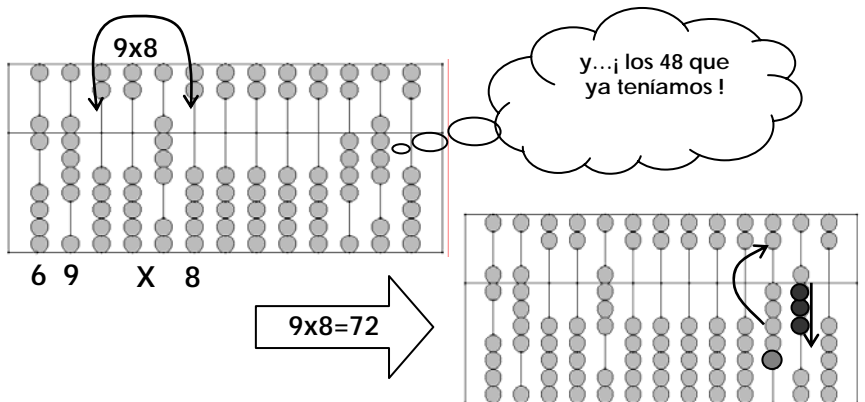


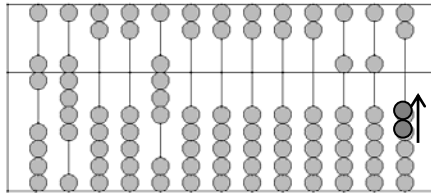
Podemos proceder como se hizo en el **ábaco de 10 cuentas**. Analicemos la siguiente secuencia de ábacos y redactemos cuál es el procedimiento que se siguió. Debemos tomar en cuenta qué es lo que representa cada producto, es decir, si son unidades, decenas, centenas, etcétera.

Multipliquemos **8 x 6** ¿qué representa el producto?, ¿dónde tenemos que representarlo? En el siguiente ábaco se da respuesta a las preguntas anteriores:

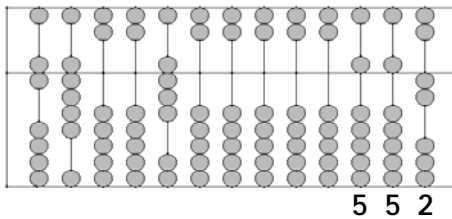
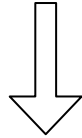


El producto de  $8 \times 9 = 72$ , ¿qué representa?, ¿unidades?, ¿decenas?...





Finalmente...



No tuvimos dificultad alguna para agregar las dos unidades. El resultado de multiplicar  $69 \times 8$  es 552.

También podemos agregar las 7 decenas siguiendo otro procedimiento: Veamos las siguientes instrucciones: Consideremos los  $8 \times 6$  que ya se habían registrado:

- En la columna de las decenas es posible anotar las 7 decenas. Bajamos la cuenta que vale 5 decenas y las 2 cuentas que valen una decena.
- Cambiamos las 2 cuentas que valen 5 decenas cada una, por una centena.

- Cambiamos las cinco centenas por una de las cuentas que valen 5 centenas.
- Cambiamos las 5 cuentas que valen una decena cada una, por una de las cuentas que valen 5 decenas.

Al agregar las 2 unidades obtendremos el mismo resultado: **552**

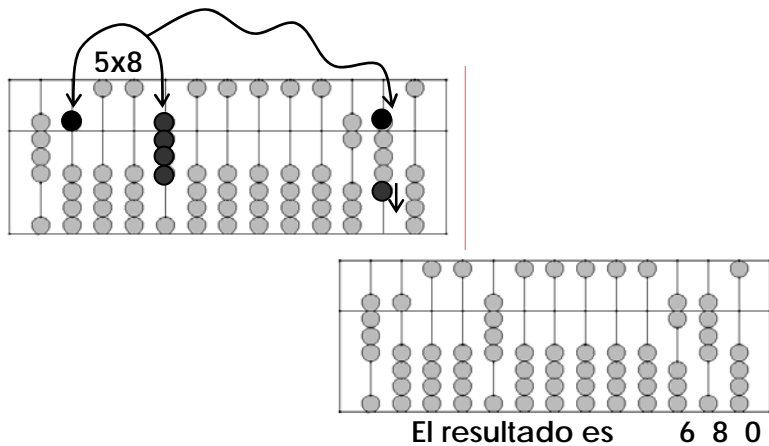
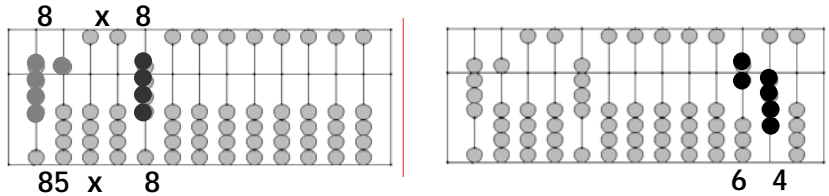
**¿Cuál de los dos procedimientos le parece más sencillo?,  
¿cuál considera que los niños pueden utilizar?**

Le sugerimos realizar la multiplicación  $69 \times 8$ , pero ahora, empecemos multiplicando la unidades y después las decenas. ¿Qué procedimiento es más sencillo?, ¿por qué?

De acuerdo al resultado que obtuvimos se habrán utilizado 552 naranjas, por lo que debemos considerar un mayor número de bolsas, por ejemplo, 85. Utilicemos el ábaco japonés para realizar la operación  **$85 \times 8$** .

### Ábaco Japonés

En los siguientes ábacos se muestra el procedimiento. Analicemos los ábacos y redactemos el procedimiento que se siguió:



Le invitamos a realizar otras estimaciones hasta dar con la respuesta al problema que hemos planteado.

### La estimación

La multiplicación es una operación tal, que en la habilidad para estimar se requiere del redondeo de cantidades y de reconocer qué representa el resultado de multiplicar dos dígitos (decenas, centenas, unidades de millar, decenas de millar, ...); por ejemplo, estimemos el producto **75** por **87**.



- Si redondeamos 75 a 70 y 87 a 90, entonces  $75 \times 87$  es aproximadamente  $70 \times 90$ ; si tomamos en cuenta que  $9 \times 7 = 63$  centenas, entonces  $75 \times 87$  es cercano a 6300.
- Si redondeamos 75 a 80 y 87 a 90, resulta que la estimación es cercana a  $80 \times 90$ . Es decir,  $75 \times 87$  es aproximadamente 7200.

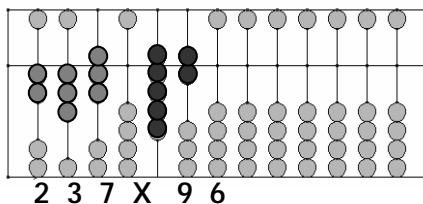
Observemos la gran diferencia entre una y otra estimación; el resultado de la multiplicación  $75 \times 87$  es 6,525, ¿a qué se debe la diferencia entre las estimaciones?

- En este caso, una forma de hacer una estimación más cercana es la siguiente: redondeemos 75 a 100; si consideramos que 25 es la cuarta parte de 100, entonces podemos multiplicar mentalmente  $87 \times 100$  y al resultado (8700) dividirlo mentalmente entre 4: la cuarta parte de 8 es 2, la cuarta parte de 7 es 1 y sobran 3, la cuarta parte de 30 es 7 y sobran dos y la cuarta parte de 20 es 5. El resultado es 2175. Entonces podemos considerar que si a 8700 le quitamos 2200 (hemos redondeado 2175), el resultado es 6500; ésta es una mejor aproximación.

La forma de estimar depende mucho de las cantidades involucradas. La habilidad para estimar también tiene que ver con el dominio de relaciones numéricas, así 75 se puede ver como los  $\frac{3}{4}$  de 100, o es un número divisible entre 5 o divisible entre 3, o es un múltiplo de 4 menos 3,

etc. Lo importante es proponer actividades en las que los niños reflexionen acerca de este tipo de relaciones numéricas.

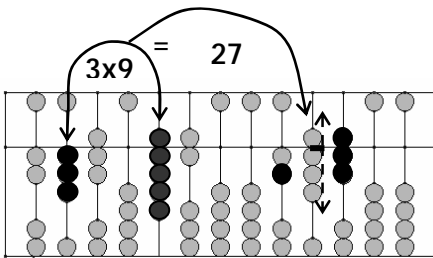
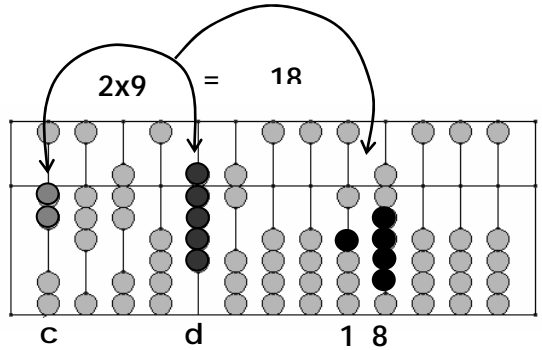
Como hemos observado, la forma de realizar multiplicaciones en el ábaco es similar en los tres ábacos. Podemos realizar al menos dos procedimientos: iniciar de derecha a izquierda o de izquierda a derecha; en cualquiera de los dos casos, es importante poner en juego las dos relaciones fundamentales del sistema de numeración decimal, es decir, 10 a 1 y 1 a 10.



A continuación realizaremos en el **ábaco japonés** la multiplicación: **237x 96** que implica números relativamente "grandes" y mostraremos como identificar el lugar en el cual hacer el registro de cada producto: el siguiente ábaco muestra el registro del multiplicando y multiplicador:

Cuando realizamos  $9 \times 2 = 18$ , en realidad estamos multiplicando  $90 \times 200$ , es decir, decenas por centenas, cuyo resultado representa unidades de millar. Nos podemos dar cuenta de lo anterior si multiplicamos  $10 (d) \times 100 (c) = 1000 (Um)$ .

Entonces debemos registrar 18 unidades de millar o su equivalente, una decena de millar y 8 unidades de millar; como se muestra a continuación:

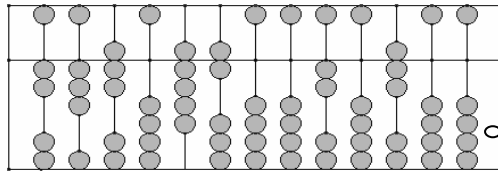


Al multiplicar  $9 \times 3 = 27$  multiplicamos decenas por decenas, cuyo resultado representan centenas,  $10 (d) \times 10 (d) = 100 (c)$ , de manera que debemos representar un

lugar a la derecha del primer resultado anterior (unidades de millar), es decir, debemos registrar 27 centenas o su equivalente: 2 unidades de millar y 7 centenas.

El registro se hace en dos pasos: registramos primero las 7 centenas, dado que no se tienen las dos unidades de millar, registramos una decena de millar.

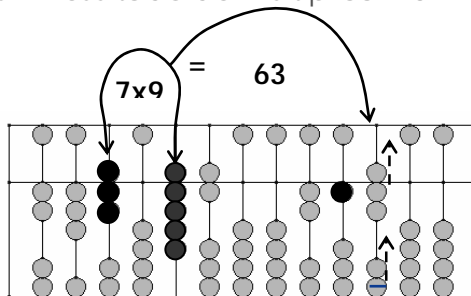
¿Cuántas unidades de millar debemos quitar ahora?

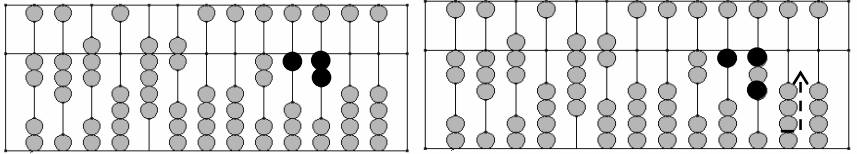


¡Claro! de las 10 unidades de millar se quitaron 8.

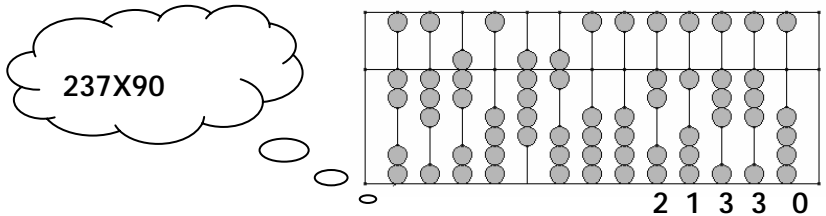
¡Ya hemos agregado las dos unidades de millar!

Multipliquemos  $9 \times 7 = 63$ , el resultado representa decenas, ¿por qué? Tenemos que registrar 6 centenas y 7 decenas. El resultado de multiplicar  $237 \times 90$  es:





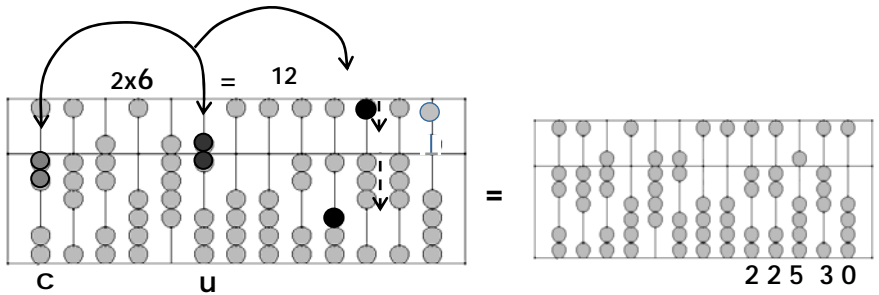
Al aumentar las tres unidades obtenemos el resultado de multiplicar  $237 \times 90$ , es decir:



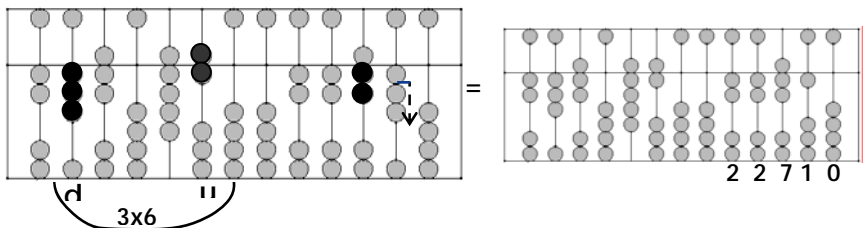
Multipliquemos  $237 \times 7$ . Le proponemos que utilice su ábaco y siga las siguientes instrucciones. Recuerde que en el ábaco debemos tener registrado tanto el multiplicando como el multiplicador.

Analice cada uno de los ábacos que acompañan cada instrucción.

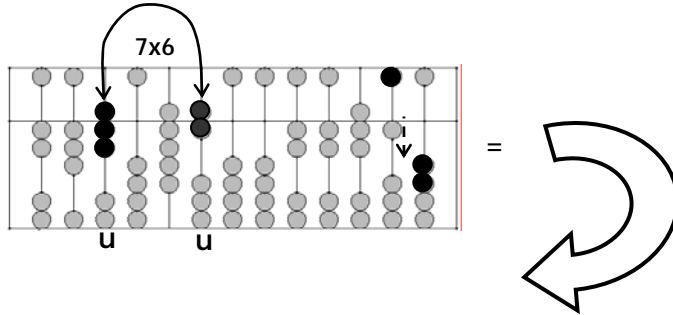
- Multipliquemos  $6 \times 2 = 12$ ; el producto ¿qué representa?, observemos que estamos multiplicando unidades por centenas. En el ábaco, ¿dónde haremos el registro?



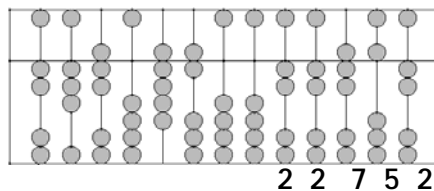
- Multipliquemos  $6 \times 3 = 18$ , el producto ¿Qué representan?



- Multipliquemos  $7 \times 6 = 42$ ; como multiplicamos unidades por unidades, el resultado representa unidades.



Finalmente...



Para finalizar proponemos la siguiente actividad, a partir de la cual podremos realizar varias multiplicaciones.

La siguiente figura es un cuadrado mágico de  $5 \times 5$

30	37	14	21	28
36	18	20	27	29
17	19	26	33	35
23	25	32	34	16
24	31	38	15	22

Verifiquemos que la suma de los números que están colocados en forma horizontal, vertical, así como las diagonales mayores den como resultado 130.

Multipliquemos cada uno de los números del cuadrado mágico por 128. Cada resultado debemos escribirlo en el lugar dónde se ubica el número por el cual multiplicamos por 128, ejemplo  $30 \times 128 = 3840$ ;  $34 \times 128 = 4352$ .

30	37	14	21	28
36	18	20	27	29
17	19	26	33	35
23	25	32	34	16
24	31	38	15	22

3840				
			4352	

Verifiquemos que con los nuevos números también se obtiene un nuevo cuadrado mágico.

Elija otro número y realice la actividad que le hemos propuesto en la actividad anterior y verifique que se obtiene un nuevo cuadrado mágico.



---

## ALGORITMOS PARA DIVIDIR CON EL ÁBACO

---

**E**xisten dos tipos de problemas que pueden resolverse mediante la división: los tasativos y los de reparto.

### Problemas tasativos

El problema que nos sirvió para desarrollar el apartado de la multiplicación corresponde al tipo tasativo: Una persona tiene 768 naranjas y desea colocarlas en bolsas en las que caben 8 naranjas, ¿cuántas bolsas necesita? ¿y cuántas naranjas le sobran?

### Problemas de reparto

El siguiente es un problema de esta categoría: 8 hermanos juntaron 989 pesos, si se los van a repartir en parte iguales, ¿cuánto les tocará a cada uno?; ¿cuánto les sobra?

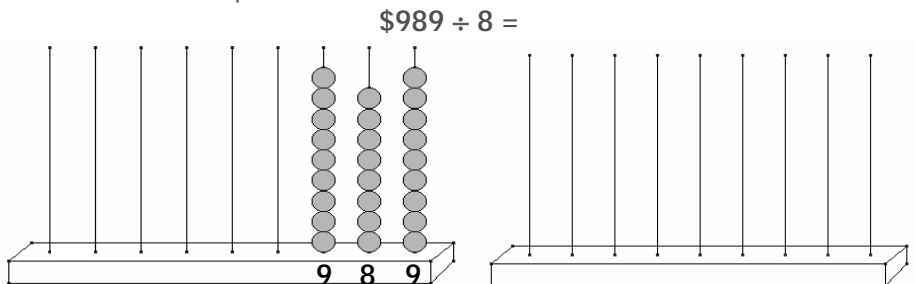
Regresemos al problema de tipo tasativo: una persona tiene 768 naranjas y desea colocarlas en bolsas en las que caben 8 naranjas, ¿cuántas bolsas necesita?, ¿cuántas naranjas le sobran? Los alumnos que no tienen experiencia en este tipo de problemas utilizan la multiplicación como una forma de resolverlos; la división es una herramienta que utilizarán más adelante.

Los problemas de reparto son ideales para abordar la enseñanza de la división. La estructura de estos problemas permite a los alumnos concretar en el ábaco los valores relativos de las cantidades; de esta manera el reparto se puede realizar sin mucha dificultad. La idea fundamental es repartir las cantidades que representan cada valor relativo y cuando es necesario, poner en juego las dos relaciones fundamentales del sistema de numeración decimal. A continuación mostraremos como podemos realizar la división para resolver el problema de reparto que hemos planteado.

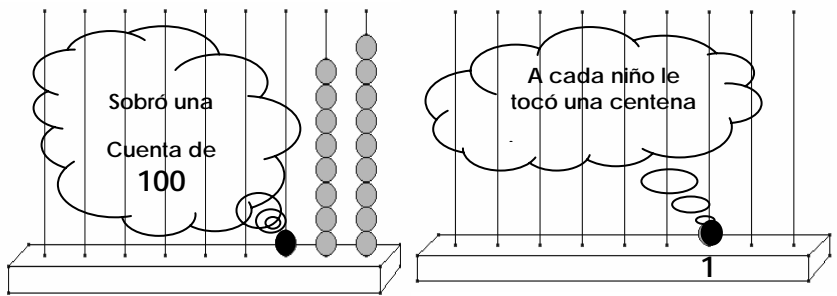
### Ábaco de Cuentas Externas

Como en el caso de la multiplicación, conviene utilizar dos ábacos; en uno de ellos representaremos la cantidad a repartir y en el otro registraremos la cantidad que le corresponde a cada hermano al hacer el reparto.

Empecemos por representar en uno de los ábacos la cantidad a repartir.



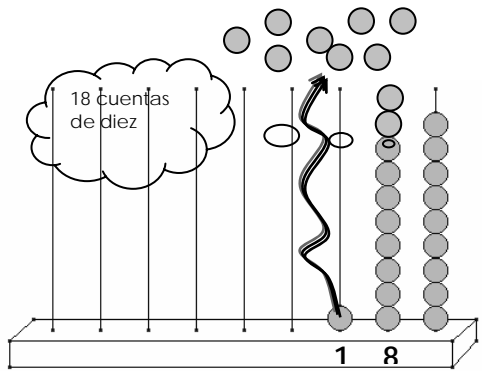
Iniciemos el reparto por las cuentas que representan los billetes de 100 pesos, (centenas). Son 9 centenas. Es claro que a cada niño le toca un billete, por lo que debemos registrar una centena en el lugar que le corresponde y debemos quitar las ocho centenas que hemos repartido. En los siguientes ábacos mostramos el resultado.



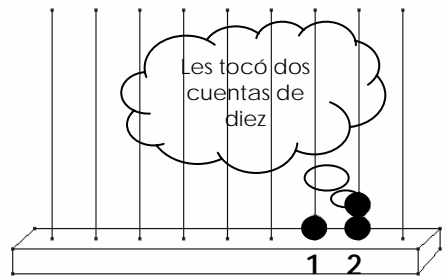
Sobró una cuenta de 100 o una centena; no podemos repartirla a los 8 niños, ¿qué podemos hacer?, ¿a cuántas monedas de 10 es equivalente el billete de 100?, o ¿cuántas decenas equivalen a una centena?

Podemos suponer que nuestros alumnos tienen un relativo dominio de la relación 1 a 10 que hay entre las cuentas de dos varillas consecutivas del ábaco; de esta manera determinarán que al cambiar la centena por decenas les darán 10, por lo que tendrán 18 decenas para repartir.

Los niños para repartir las 18 decenas, los niños pueden hacerlo de manera concreta, es decir, tomar 18 cuentas y averiguar cuántas le tocan a cada niño.

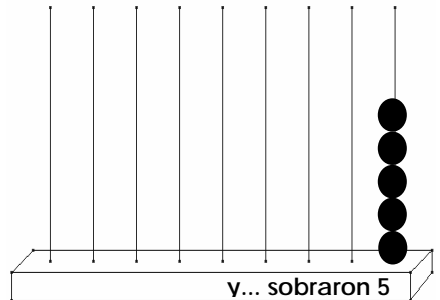
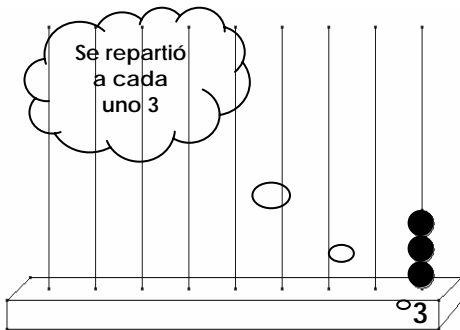
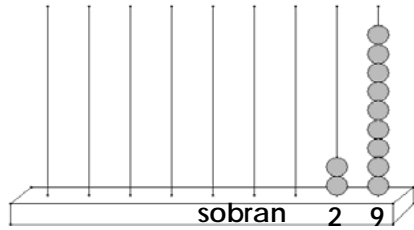


En ocasiones hay que propiciar el uso de otra estrategia: suponer que se le ha dado a cada niño una cierta cantidad y luego averiguar si faltaron o sobraron monedas de 10 (decenas). Por ejemplo, si suponen que dan 3 monedas (decenas), tendrían que tener 24; si dan 2, necesitarían 16 decenas. Como tienen 18, les sobrarán 2. Como se muestra en el ábaco de la derecha.

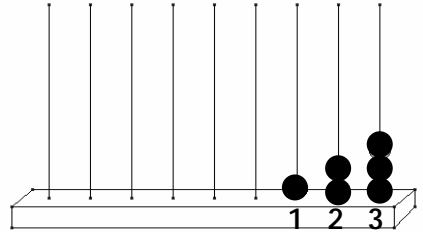
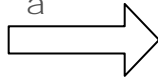


El procedimiento para repartir las 2 decenas y las 9 unidades es similar al anterior: cambiar las decenas por unidades; después podemos realizar el reparto, ya sea de manera directa (teniendo a la mano

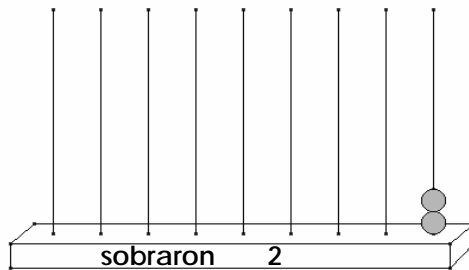
29 cuentas) o como se indicó antes (suponen que se dio una cierta cantidad a cada niño y posteriormente averiguan si les sobra o falta). Así encontrarán que a cada niño le corresponden 3 unidades y sobran 5.



Finalmente, lo que  
le corresponde a  
cada niño es:



El residuo, es decir, lo que sobró es:

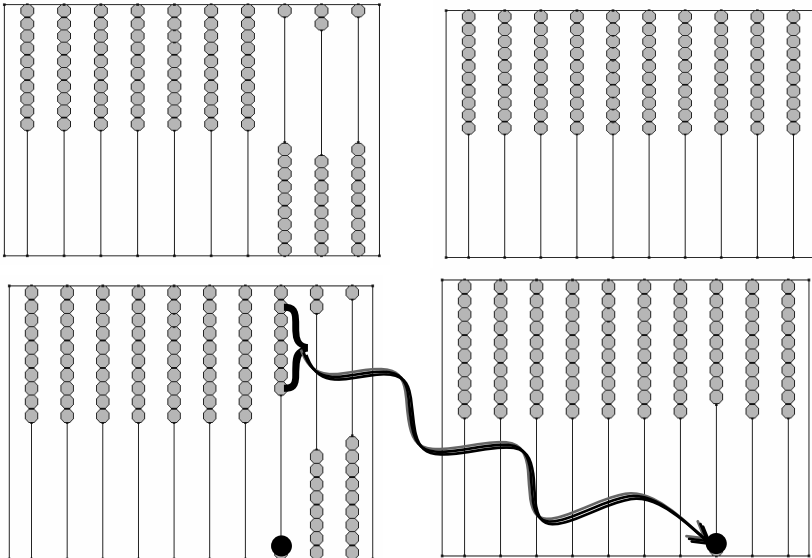


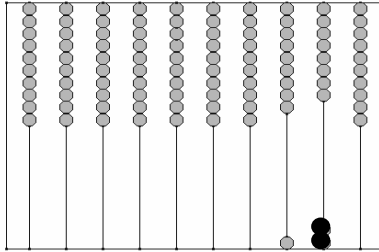
El procedimiento para dividir 989 entre 8 es similar al que habitualmente realizamos con lápiz y papel: empezamos la división repartiendo las cantidades de mayor valor relativo y terminamos con las unidades. En el caso del ábaco, necesitamos saber qué es lo que estamos repartiendo para saber en que parte del ábaco registraremos el resultado.

## Ábaco de Diez Cuentas

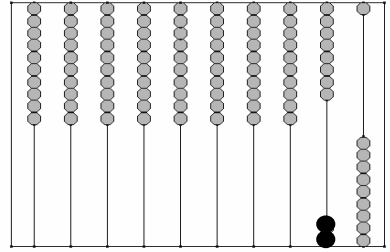
La forma de operar en este ábaco es similar al modo de dividir en el **ábaco de cuentas externas**, por tal razón proponemos analizar la siguiente secuencia de ábacos y redactar el procedimiento que se ilustra. Recomendamos utilizar también dos ábacos, uno para registrar la cantidad a repartir y el otro para registrar los resultados.

Procedimiento:  $989 \div 8$

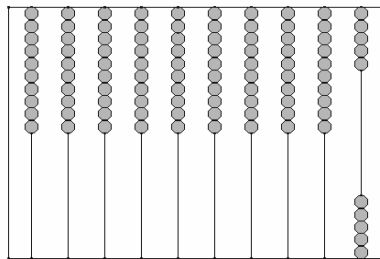
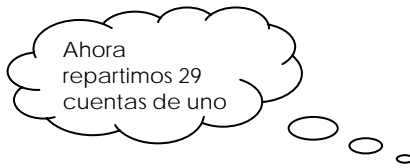




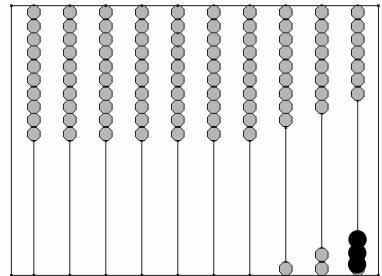
de las 18, se repartieron 2



de las 18, sobraron 2

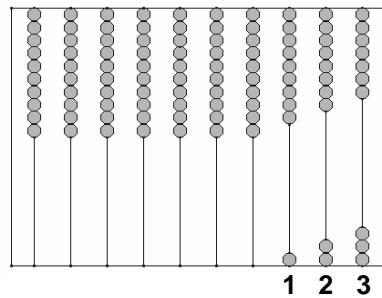


de las 29, sobraron 5



de las 29, se repartieron 3

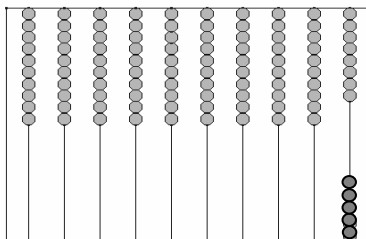
Finalmente a cada niño le repartieron:



1 2 3



Residuo 5

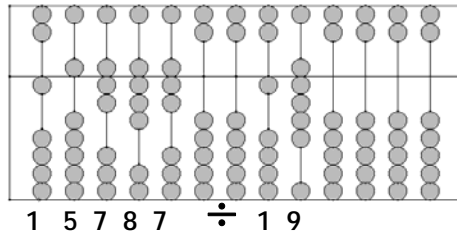


Al redactar el procedimiento debemos tomar en cuenta que en este ábaco es imposible tener, por ejemplo, las 29 cuentas que representan un peso; necesitamos tener clara la relación 1 a 10. De esta manera podemos darnos cuenta que 2 decenas equivalen a 20 unidades; por lo que en total tendremos 29 unidades.

La idea anterior es fundamental cuando tenemos que efectuar divisiones un tanto más complicadas, por ejemplo; si queremos dividir 1245 entre 18. Necesitamos reconocer: que la cantidad a dividir es equivalente a una unidad de millar, 2 centenas, 4 decenas y 5 unidades: Por otra parte, también representa 12 centenas, 4 decenas y 5 unidades ó 124 decenas y 5 unidades o 1245 unidades.

Para ejemplificar lo anterior utilicemos **el ábaco chino**. Efectuaremos la división **15,787** entre **19**; la cual se deriva del siguiente problema:

Tenemos 15,787 hojas. Si queremos colocarlas en 19 paquetes iguales, ¿cuántas hojas se colocarán en cada paquete?. Utilizaremos un sólo ábaco, en el que representaremos el dividendo en la parte izquierda, en medio el divisor y el cociente (resultado de la división) en el lugar habitual en el que representamos cantidades. Iniciemos el reparto. Debido a que sólo contamos con una decena de millar, no podemos repartirla entre 19, tenemos que cambiarla por unidades de millar.



Después de hacer el cambio, ¿cuántas tendremos en total? ¿Podemos repartir la cantidad total de unidades de millar entre 19?

No, no es posible; es necesario cambiar el total de unidades de millar por centenas, ¿cuántas centenas se tendrán una vez que hayamos hecho el cambio?

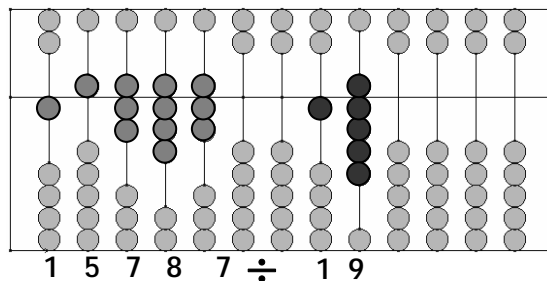
Esta última pregunta implica cambiar de manera mental 15 unidades de millar por centenas; esto lo podremos hacer sin dificultad si sabemos multiplicar mentalmente una cantidad por 10. Si cada unidad de millar equivale a 10 centenas, ¿a cuántas centenas equivalen las 15 unidades de millar? Podemos contestar la pregunta

mediante la multiplicación  $15 \times 10$ . Es claro que la necesidad de multiplicar mentalmente por 10 una cantidad cualquiera es una cuestión central.

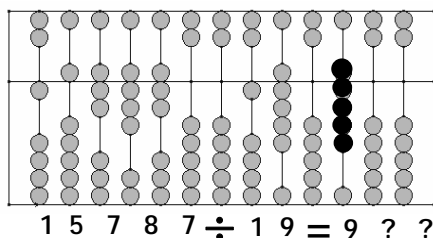
Las ideas anteriores nos llevan a la necesidad de diseñar alguna estrategia para que los alumnos descubran la regla para multiplicar por 10. Una estrategia sencilla es hacer uso de una calculadora y utilizarla para multiplicar varios números por 10; de esta manera, y mediante la reflexión que el profesor propicie, los alumnos deducirán la regla para multiplicar por 10, esto es: agregar un cero al número que se multiplica por 10. De igual forma, conviene que los niños deduzcan las reglas para multiplicar por 100, 1000, etcétera.

Entonces debemos repartir 157 centenas. En este caso, la estimación es un buen recurso para determinar cuántas hojas debemos colocar en cada uno de los 19 paquetes. Recomendamos analizar el tipo de estimación que conviene hacer para saber la cantidad de hojas que corresponde a cada paquete.

Representemos el dividendo y el divisor.



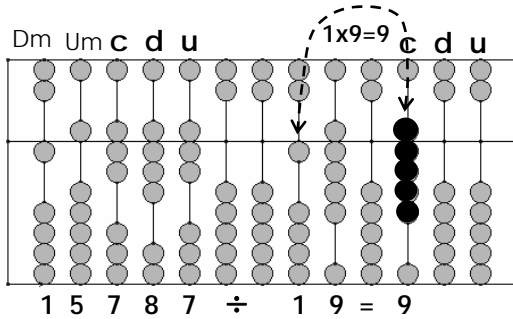
Vamos a suponer que en cada paquete debemos poner 9 decenas de hojas. Para saber cuántas decenas se utilizarán tendremos que multiplicar  $9 \times 19$ .



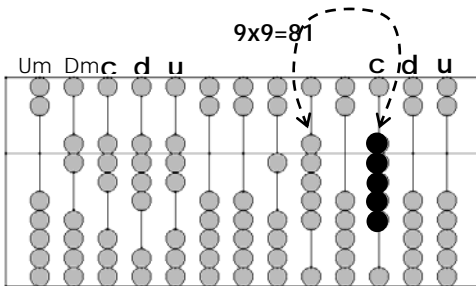
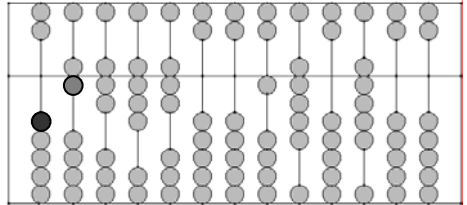
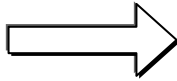
En la parte derecha del ábaco registramos las nueve centenas. Analicemos cómo se puede proceder para saber cuántas centenas de hojas se necesitan en los 19 paquetes.

Multipliquemos  $9 \times 1$ . Si sabemos que el 9 corresponde a las centenas y el uno es una decena, el resultado ¿qué representa?, ¿decenas?, ¿centenas?, ¿unidades de millar? Recordemos que estamos multiplicando centenas por decenas.

De acuerdo al resultado anterior necesitamos quitar 9 unidades de millar a las 15 que se tienen, ¿por qué 15?; ¿cómo podemos realizar esta acción? El siguiente ábaco muestra el procedimiento:

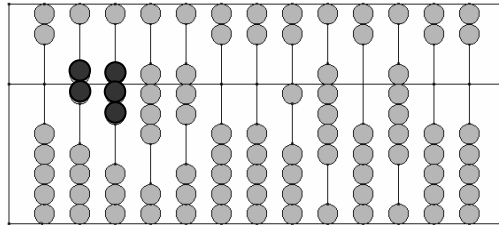


¿Cuántas unidades de millar sobraron?



Ahora debemos multiplicar  $9 \times 9 = 81$ , ¿es cierto que el resultado representa centenas?, ¿por qué? Entonces debemos quitar 81 centenas.

Observemos que sólo tenemos 68 centenas y necesitamos quitar 81. Es decir, no podemos realizar esta acción.

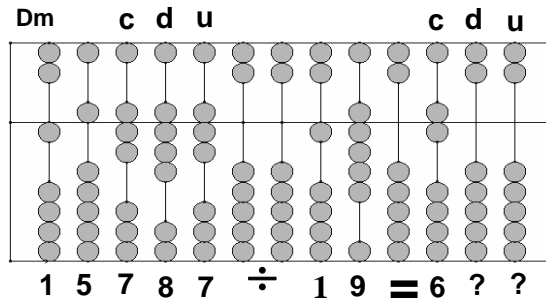


Concluimos que suponer que a cada paquete le corresponden 9 centenas de hojas, no es correcto y que restar 81 decenas es imposible, ya que sólo tenemos 68. Por lo tanto, nuestra estimación no fue adecuada; tendremos que iniciar de nueva cuenta el reparto, esto es, necesitamos volver a registrar el dividendo que teníamos antes de quitar las nueve unidades de millar. El problema en la situación anterior es que tenemos que recordar la cantidad que se tenía en el dividendo hasta ese momento.

En nuestro caso podemos recuperar la cantidad que corresponde al dividendo sin mayor dificultad, pero para un alumno que está aprendiendo a resolver este tipo de divisiones seguramente se le presenta una dificultad más: tendrá que tener en mente el dividendo con el cual inició el reparto y volver a registrarlo en el ábaco.

En este sentido, el procedimiento para resolver divisiones mediante el uso del ábaco requiere de estimar por **“abajo”** del resultado; de esta manera no se tendrá la necesidad de tener en mente el dividendo. Por ejemplo, si en nuestro problema suponemos que en cada paquete pondremos 6 centenas de hojas, al realizar los cálculos notaremos que el residuo es mayor que el divisor por lo que es necesario volver repartir.

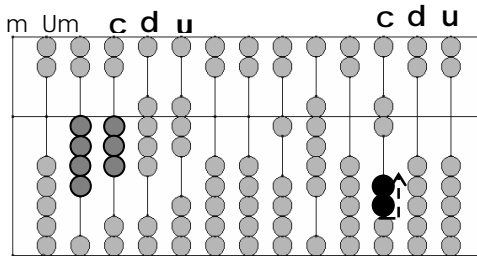
Realicemos el cálculo de cuántas centenas se necesitan si en cada paquete colocamos 6 centenas. Para ello llevemos a cabo las siguientes instrucciones:



El ábaco muestra ahora nuestra nueva estimación.

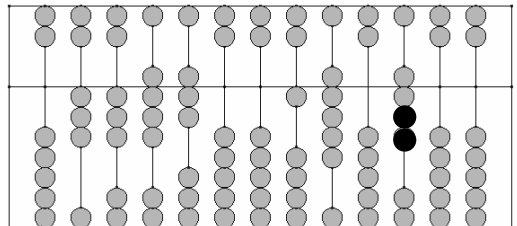
Sigamos las siguientes instrucciones:

- Multipliquemos  $6 \times 1 = 6$ ; el resultado representa unidades de millar, ¿por qué?
- Restemos las 6 unidades de millar: Para realizar esta operación quitemos la decena de millar y agreguemos 4 unidades de millar. ¿por qué es correcto este procedimiento?
- Multipliquemos  $6 \times 9 = 54$ . ¿Qué representan? ¡Claro! centenas, ¿por qué?
- Restemos 54 centenas, es decir, quitemos 5 unidades de millar y cuatro centenas. No tendremos problemas para quitar las cinco unidades de millar. Para quitar las cuatro centenas, quitamos la cuenta que representa cinco centenas y agregamos una centena, ¿es correcto el procedimiento?



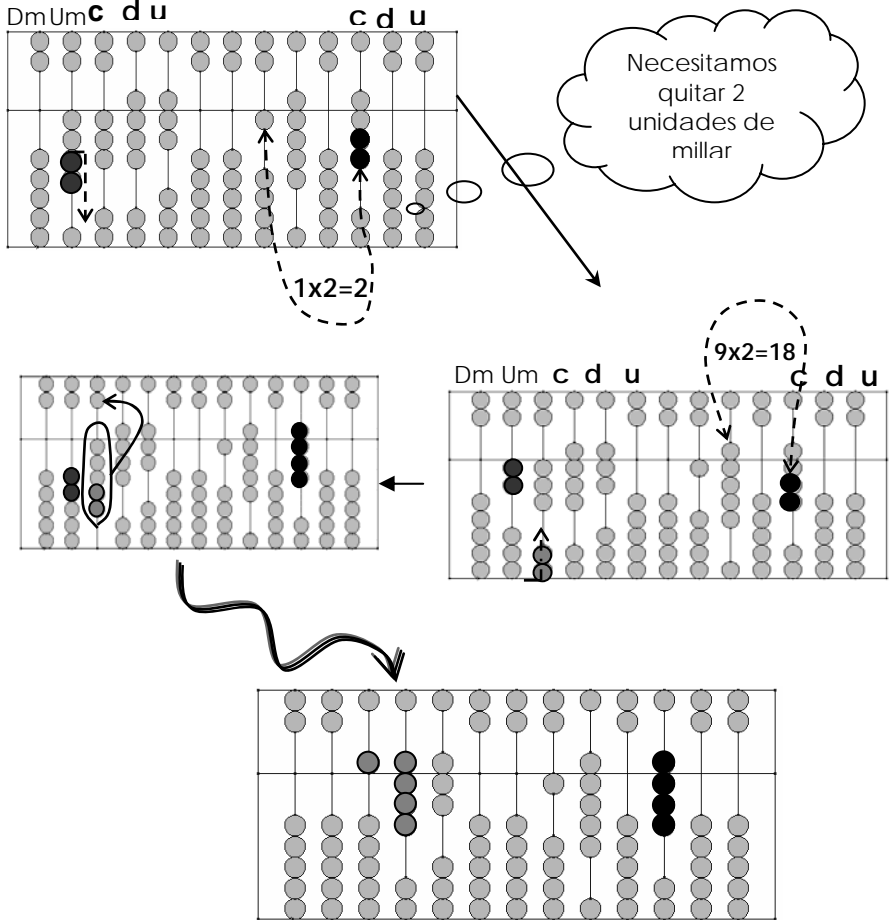
Observemos que sobran 43 centenas, por lo tanto podemos volver a repartir. Es relativamente sencillo determinar que podemos colocar en los paquetes otras dos centenas de hojas.

Así registramos otras dos centenas.

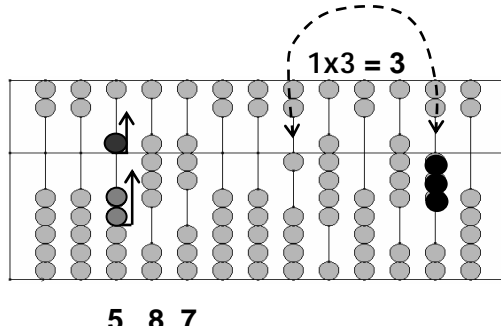




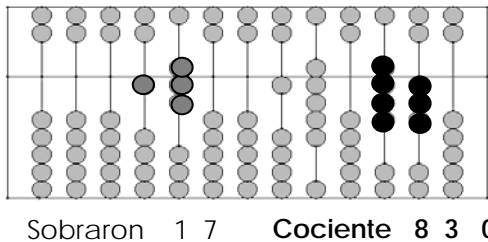
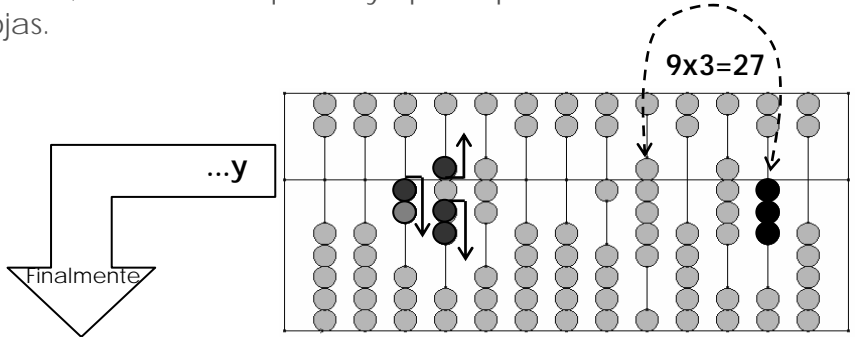
Mediante el procedimiento que se ilustra a continuación determinaremos el nuevo residuo.



Sobraron 18 centenas de hojas y en cada paquete quedaron 8 centenas de hojas.



Para seguir con la división hay que repartir ahora 587 hojas entre los 19 paquetes. Le invitamos a realizar la división; estimamos que hay que repartir 3 decenas de hojas.



Sobraron 17 hojas que ya no podemos repartir entre los 19 paquetes. Por lo tanto repartimos 830 hojas a cada paquete.

Al realizar la operación en el ábaco observaremos que el residuo queda registrado en el lugar en el que se encontraba el dividendo.

## La estimación

En las líneas precedentes hemos indicado que la división es una operación que permite desarrollar la habilidad de la estimación. A continuación mostraremos algunas estrategias que los alumnos pueden desarrollar para estimar el cociente de una división.

Consideremos la siguiente división:

$$456,789 \div 247$$

Si redondeamos tanto el dividendo como el divisor, por ejemplo a 400,000 y 200; entonces podemos dar como una estimación 2000. ¿por qué?

Si redondeamos el dividendo a 450,000 y el divisor a 250, como 250 es la cuarta parte de 1000, podemos simplemente obtener la cuarta parte de 450,000, es decir, 1800, que es una mejor aproximación.

En ocasiones, basta con determinar el número de dígitos que tendrá el cociente. Observemos que debemos considerar 456 unidades de millar, por lo tanto, el resultado de nuestra división debe tener cuatro cifras, ¿por qué?

Como se observa, para proporcionar “buenas” estimaciones es conveniente utilizar (mediante el redondeo) números que podemos manejar con relativa facilidad. La habilidad para elegir números con los cuales podemos operar mentalmente, se logra a través de la experiencia de los alumnos al manejar este tipo de números.

El procedimiento para dividir en el ábaco japonés es básicamente el mismo que el utilizado para dividir en el ábaco chino. Por esta razón, recomendamos resolver el siguiente problema utilizando el ábaco japonés, que le permitirá practicar la división y la estimación.

- Observe que al realizar la división  $45,677$  entre  $3$ , el residuo es  $2$ . Encuentre todos los números que se pueden proponer, de tal forma que al dividir  $45,677$  entre cada uno de esos números, el residuo también sea  $2$ ; por ejemplo,  $5$  es uno de esos números.
- escoja al azar un número de  $6$  cifras, divídalo entre  $4$  y determine el residuo. Después encuentre todos los números, de tal forma que al dividir el número de seis cifras entre cada uno de esos números, el residuo también sea aquel que se obtuvo al dividir el número de  $6$  cifras entre  $4$ .
- En el sentido de la situación anterior encuentre una regla que permita conocer, sin necesidad de efectuar divisiones, todos los números que dejan el mínimo residuo que obtuvo al dividir el número de  $6$  cifras entre  $4$ .

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Barody, J.A.** 1998. *El Pensamiento Matemático de los Niños*. Editorial Visor. Madrid.
- Carpenter, T. Y J. Moser.** 1982. "El desarrollo de las habilidades para resolver problemas de adición y sustracción" en *Addition and subtraction: A Cognitive Perspective*, Lawrence Erlbaum Associates, Nueva Jersey.
- SEP.** 1996. Libro para el maestro. Primer grado, México.
- SEP.** 1996. Libro para el maestro. Segundo grado, México.
- SEP.** 1996. Libro para el maestro. Tercer grado, México.
- SEP.** 1996. Libro para el maestro. Cuarto grado, México.
- SEP.** 1996. Libro para el maestro. Quinto grado, México.
- SEP.** 1996. Libro para el maestro. Sexto grado, México.
- SEP.** 1993 Plan y programas de estudio. Educación Básica. Primaria,.

- Botello Corte, Héctor, et al.** 1998. "Problemas y Operaciones de Suma y Resta". Fascículo 2, en *Estrategias Pedagógicas para niños de Primaria con Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas*, Dirección General de Educación Especial, México.
- Botello Corte, Héctor, et al.** 1998. "Problemas y Operaciones de Multiplicación y División". Fascículo 2, en *Estrategias Pedagógicas para niños de Primaria con Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas*, Dirección General de Educación Especial, México.
- Bueno, Martín y Toro Bueno, Salvador.** 1984. *Deficiencia Visual, Aspectos Psicoevolutivos y Educativos*. Editorial Aljibe, Málaga.
- Ifrah, Georges.** 1984. *Las Cifras. Historias de una Gran Invención*, Alianza Editorial, Madrid, 1988.

## SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

---

- ✉ Para sugerencias que permitan enriquecer el presente documento, favor de enviar sus comentarios a la Dirección de Educación Especial, Subdirección de Apoyo Técnico Complementario (SATC), Lucas Alamán No. 122, Col. Obrera. C.P. 06800, Mezanine. e-mail [dee@sep.gob.mx](mailto:dee@sep.gob.mx) y [gxolot@sep.gob.mx](mailto:gxolot@sep.gob.mx)
  
- ☎ O comunicarse al teléfono: 55-78-91-81.